پاسخنامه
ریاضی
تابع

کانون
فرهنگی
آموزش
قلم‌چی

www.mapedu.ir

۱ – گزینهٔ «۱» (ایلک سادات)

با توجه به تذکر متن کتاب درسی در صفحه ۴، لمن مژه (۱و۰) بوده و معنای همین مقدار $b=a$ برابر یک است.

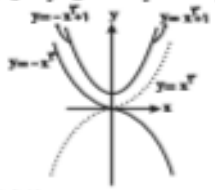
(تابع) (ریاضی ۱، صفحهٔ ۴)

---

۲ – گزینهٔ «۳» (صادق متعهدی)

$$y = x^2|x|+1 = \begin{cases} x^3+1 & , x \geq 0 \\ -x^3+1 & , x < 0 \end{cases}$$

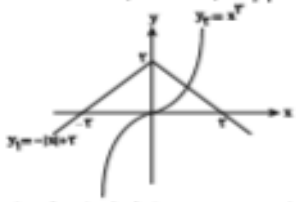
یعنی شاخهٔ سمت راست نمودار، همان $y=x^3$ است که ۱ واحد به طرف بالا رفته و شاخهٔ سمت چپ نمودار، $y=-x^3$ است که یک واحد بالا رفته است.



(تابع) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۵)

۳ – گزینهٔ «۲» (علی‌اصغر شریفی)

نمودارهای توابع $y_1=-|x|+2$ و $y_2=x^3$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودارهای رسم شده، دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه با طول مثبت قطع می‌کنند. بنابراین معادلهٔ مورد نظر فقط یک ریشهٔ مثبت دارد.

(تابع) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۵)

---

۴ – گزینهٔ «۱» (یاسین سپهر)

نمودار این تابع از انتقال‌های افقی و عمودی نمودار تابع $y=x^3$ به دست آمده است. اگر نمودار $y=x^3$ را یک واحد به سمت راست (در راستای محور xها) و سپس دو واحد به سمت بالا (در راستای محور yها) انتقال دهیم، ضابطهٔ $y=(x-1)^3+2$ به دست می‌آید که همان ضابطهٔ مربوط به نمودار داده شده در صورت سؤال است. پس:

$a=1, b=2 \Rightarrow a.b=2$

(تابع) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۵)

---

۵ – گزینهٔ «۴» (صادق متعهدی)

ابتدا $f(\frac{3}{2})+f(-\frac{3}{2})$ را حساب کرده، سپس $f(2)$ را کم می‌کنیم:

$$f(\tfrac{3}{2})+f(-\tfrac{3}{2}) = (-(\tfrac{3}{2})^3+a(\tfrac{3}{2})^2+\tfrac{3}{2}+2)$$
$$+(-(-\tfrac{3}{2})^3+a(-\tfrac{3}{2})^2-\tfrac{3}{2}+2)$$
$$=2a(\tfrac{9}{4})+2=\tfrac{9}{2}a+2$$
$$f(2)=-8+2a+2+2=2a-2$$

بنابراین: $f(\frac{3}{2})+f(-\frac{3}{2})-f(2)=(\frac{9}{2}a+2)-(2a-2)=\frac{a}{2}+8=5$

$\Rightarrow a=-6$

پس: $f(x)=-x^3+(-6x^2)+x+2$

$\Rightarrow f(1)+f(2)=(-1-6+1+2)+(-8-24+2+2)=-32$

(تابع) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۵)

---

۶ – گزینهٔ «۴» (علی مبارک)

تابع $f(x)$ یک تابع خطی است پس ضابطهٔ آن به صورت $y=ax+b$ می‌باشد. بنابراین:

$f(2)=2a+b$

$f(-2)=-2a+b$

$\Rightarrow f(2)=f(-2)+2 \Rightarrow 2a+b=-2a+b+2 \Rightarrow a=\frac{2}{2}$

$f(2)=1 \Rightarrow 2(\frac{2}{2})+b=1 \Rightarrow b=-\frac{1}{2}$

$f(x)=\frac{2}{2}x-\frac{1}{2} \xrightarrow{x=0} y=-\frac{1}{2}$

(تابع) (ریاضی ۱، صفحهٔ ۱۰)

۷ – گزینهٔ «۱» (آرانا صدری)

دامنهٔ تابع، $\mathbb{R}-\{-2\}$ است، پس $x=-2$ تنها ریشهٔ مخرج کسر است. از آن‌جا که مخرج به صورت یک عبارت درجهٔ دوم است، پس باید ریشهٔ مضاعف $x=-2$ داشته باشد، به عبارتی به صورت $A(x+2)^2$ در بیاید. از مقایسهٔ عبارت $2x^2+cx+d$ با عبارت $A\underbrace{(x+2)^2}_{x^2+4x+4}$ واضح است که $A=2$ بوده و درنتیجه $c=12$ و $d=18$ خواهد بود.

حال گفته شده که تابع $f(x)=\frac{2x^2+ax+b}{2x^2+12x+18}$ گویا است یک تابع ثابت شود. برای این منظور باید صورت کسر به صورت ضریبی از مخرج در آید، با مقایسهٔ جملات اول صورت و مخرج، مشخص می‌شود که صورت گویا است $\frac{2}{2}$ برابر مخرج باشد، پس این نسبت در بقیهٔ جملات صورت و مخرج نیز برقرار است، یعنی:

$$\begin{cases} a=\frac{2}{2}(12)=18 \\ b=\frac{2}{2}(18)=27 \end{cases}$$

و نهایتاً تابع به صورت تابع ثابت $y=\frac{2}{2}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-2\}$ خواهد بود.

پس: $\frac{a-b+c-d}{k}=\frac{18-27+12-18}{\frac{2}{2}}=\frac{-15}{\frac{2}{2}}=-10$

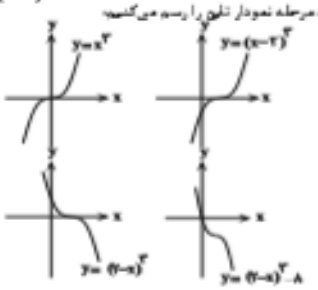
(تابع) (ریاضی ۱، صفحهٔ ۱۰)

---

۸ – گزینهٔ «۱» (مصطفی کرمی)

$$f(x)=\frac{\underbrace{6x^2-x^3-12x+8}}{(2-x)^3}-8=(2-x)^3-8$$

حالا مرحله به مرحله نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



(تابع) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۵)

---

۹ – گزینهٔ «۳» (علی مبارک)

$f(x)=ax^2-x+c$

(۱)، $f(1)=f(-1)+2 \Rightarrow a-1+c=-a+1+c+2$

$\Rightarrow a-1=-a+3 \Rightarrow 2a=2 \Rightarrow a=2$

(۲)، $f(2)=12 \Rightarrow 8a-2+c=12 \overset{a=2}{\Rightarrow} 12+c=12 \Rightarrow c=-1$

بنابراین ضابطهٔ تابع به صورت $f(x)=2x^2-x-1$ خواهد بود که داریم:

$f(a\times c)=f(-2)=-16+2-1=-15$

(تابع) (ریاضی ۱، صفحهٔ ۲)

---

۱۰ – گزینهٔ «۱» (علی مبارک)

$$f(x)=ax^5+bx^2+2x+c \Rightarrow \begin{cases} f(1)=a+b+2+c=0 \\ f(-1)=-a-b-2+c=-2 \end{cases}$$

www.mapedu.ir

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+b) = -3 - c \\ (a+b) = -1 + c \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضل}} 2c + 2 = 0$$

$$\Rightarrow c = -1 \,,\, a + b = -2$$

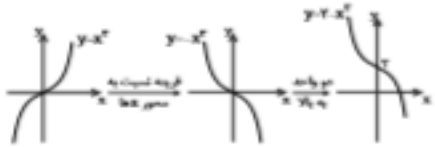
در نتیجه: $3(a+b) + 2c = 3(-2) + 2(-1) = -8$

(تابع (ریاضی ۳، صفحهٔ ۶)

---

۱۱ – گزینهٔ «۳» (کتاب آبی جامع ریاضی)

نمودار تابع $y = 2 - x^3$ را رسم می‌کنیم.



همانطور که مشاهده می‌شود نمودار تابع $y = 2 - x^3$ از ناحیه‌ی سوم عبور نمی‌کند.

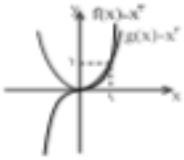
(تابع (ریاضی ۳، صفحه‌ی ۳ تا ۵)

---

۱۲ – گزینهٔ «۴» (کتاب آبی جامع ریاضی)

نمودار دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم.

همانطور که مشاهده می‌شود دو تابع در نقطه‌ی $(1 \,,\, 1)$ متقاطع‌اند و به ازای $x \in (-\infty \,,\, 1)$ نمودار تابع $f(x) = x^3$ بالای نمودار تابع $g(x) = x^2$ قرار نمی‌گیرد، پس حداکثر مقدار a برابر با یک است.



(تابع (ریاضی ۳، صفحه‌ی ۳ تا ۵)

---

۱۳ – گزینهٔ «۱» (کتاب آبی جامع ریاضی)

ضابطه‌ی تابع g را به صورت زیر طرح‌بندی می‌کنیم:

$$g(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 1 = (x+1)^3 - 1$$

بنابراین اگر نمودار تابع $f(x) = x^3$ را یک واحد به چپ و سپس یک واحد به پایین انتقال دهیم، نمودار تابع $g(x) = f(x+1) - 1$ حاصل می‌شود.

بنابراین از طول هر نقطه یک واحد کم شده و از عرض هر نقطه نیز یک واحد کم می‌شود، پس خواهیم داشت: $f(2) = 2^3 = 8$

$$A(2 \,,\, 8) \in f \xrightarrow{g(x) = f(x+1) - 1} A'(2 - 1 \,,\, 8 - 1) = (1 \,,\, 7) \in g$$

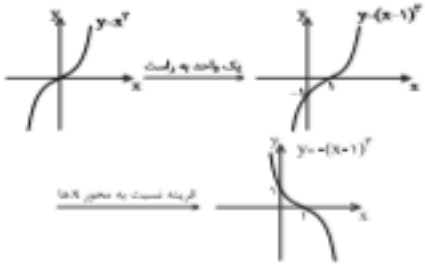
پس نقطه‌ی $(2 \,,\, 8)$ روی نمودار تابع f به نقطه‌ی $(1 \,,\, 7)$ روی نمودار تابع g تبدیل می‌شود.

(تابع (ریاضی ۳، صفحه‌ی ۳ تا ۵)

---

۱۴ – گزینهٔ «۳» (کتاب آبی جامع ریاضی)

نمودار تابع $f(x) = -(x-1)^3 + a$ را به کمک انتقال نمودار تابع $y = x^3$ رسم می‌کنیم.



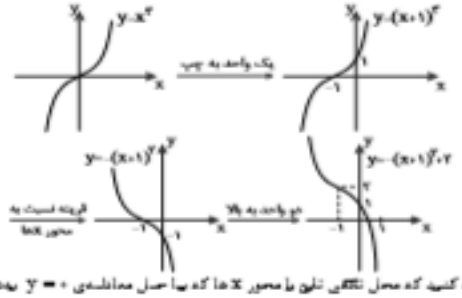
اگر $a \geq 0$ باشد، نمودار a واحد به بالا منتقل می‌شود و از ناحیه‌ی سوم عبور نخواهد کرد. اگر $a < 0$ باشد و نمودار حداکثر تا یک واحد به پایین منتقل شود، از ناحیه‌ی سوم عبور نمی‌کند، پس حدود a به صورت $a \geq -1$ خواهد بود.

(تابع (ریاضی ۳، صفحه‌ی ۳ تا ۵)

---

۱۵ – گزینهٔ «۱» (کتاب آبی جامع ریاضی)

نمودار تابع $y = 2 - (x+1)^3$ را با استفاده از نمودار تابع $y = x^3$ به ترتیب زیر رسم می‌کنیم:



توجه کنید که محل تلاقی تابع با محور xها که همان حل معادله‌ی $y = 0$ به دست می‌آید برابر با $\sqrt[3]{2} - 1$ است که از یک کوچکتر است.

$$y = 0 \Rightarrow 2 - (x+1)^3 = 0 \Rightarrow (x+1)^3 = 2$$

$$\Rightarrow x + 1 = \sqrt[3]{2} \Rightarrow x = \sqrt[3]{2} - 1 < 1$$

(تابع (ریاضی ۳، صفحه‌ی ۳ تا ۵)

---

۱۶ – گزینهٔ «۴» (کتاب آبی جامع ریاضی)

ابتدا ضابطه‌ی تابع را به صورت زیر طرح‌بندی می‌کنیم:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1 + 1 = (x-1)^3 + 1$$

برای رسم نمودار f، کافی است نمودار تابع $y = x^3$ را یک واحد به راست و سپس یک واحد به بالا انتقال دهیم. با توجه به نمودار روبه‌رو، تابع f از نواحی دوم و چهارم عبور نمی‌کند.

توجه کنید که تابع از مبدأ مختصات می‌گذرد.

(تابع (ریاضی ۳، صفحه‌ی ۳ تا ۵)

---

۱۷ – گزینهٔ «۴» (کتاب آبی جامع ریاضی)

ابتدا ضابطه‌ی تابع g را به دست می‌آوریم:

$$f(x) = x^3 \xrightarrow{\text{۴ واحد به پایین}} y = x^3 - 4$$

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} g(x) = (x-2)^3 - 4$$

www.mapedu.ir

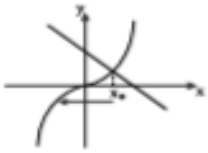
$$f(x)=g(x)\Rightarrow x^3=(x-2)^3-4$$
$$\Rightarrow x^3=x^3+3(x^2)(-2)+3(x)(-2)^2+(-2)^3-4$$
$$\Rightarrow x^3=x^3-6x^2+12x-8-4$$
$$\Rightarrow 6x^2-12x+12=0\Rightarrow x^2-2x+2=0$$
$$\Rightarrow \Delta<0 \quad \text{فاقد جواب}$$

(تابع ریاضی ۳، صفحه‌های ۳ تا ۵)

---

۱۸ – گزینهٔ «۱» (کتاب آبی تابع ریاضی)

با رسم نمودار دو تابع $y_1=3-2x$ و $y_2=x^3$، دیده می‌شود که دو نمودار یکدیگر را در یک نقطه به طول x_0 قطع می‌کنند؛ تا معادله



$$x^3=3-2x\rightarrow x^3+2x-3=0$$

تنها یک ریشه دارد. چون مجموع ضرایب این معادله صفر است، پس ریشه‌ی آن ۱ است. در نتیجه $x_0=1$ و تابع $y=x^3$، در بازه‌ی $(-\infty,1)$ پایین خط $y=3-2x$ است. بنابراین بیشترین مقدار a برابر یک است.

(تابع ریاضی ۳، صفحه‌های ۳ تا ۵)

---

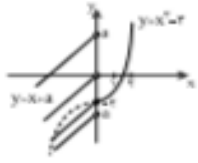
۱۹ – گزینهٔ «۴» (کتاب آبی تابع ریاضی)

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}x^2-2 & , x\geq 0\\ x+a & , x<0\end{cases}$$

برای رسم ضابطه‌ی مطلقی تابع f، نمودار تابع $y=x^2$ را دو واحد به پایین منتقل کرده، سپس قسمت چپ محور yها را قرینه می‌کنیم.

با توجه به نمودار، برای آنکه برد تابع برابر با $\mathbb{R}$ شود، باید $a\geq -2$ باشد، پس کمترین مقدار a برابر با -2 است.



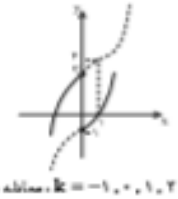
(تابع ریاضی ۳، صفحه‌های ۳ تا ۵)

---

۲۰ – گزینهٔ «۲» (کتاب آبی تابع ریاضی)

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم. برای رسم ضابطه‌ی مطلقی، کافی است نمودار تابع $y=x^3$ را یک واحد به پایین انتقال دهیم. برای رسم ضابطه‌ی پایینی، کافی است نمودار تابع $y=x^3$ را یک واحد به راست و سپس ۴ واحد به بالا انتقال دهیم.

با توجه به نمودار، خط $y=k$ اگر k در محدوده‌ی $-1\leq k<3$ باشد، دو نقطه‌ی تلاقی با نمودار f خواهد داشت و در نتیجه معادله‌ی $f(x)=k$ دو جواب خواهد داشت.



پس به ازای مقادیر صحیح $k=-1,0,1,2$، معادله دو جواب دارد.

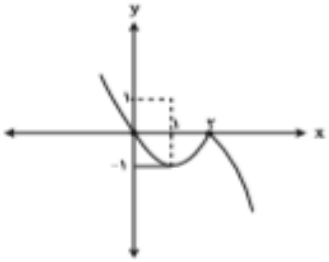
(تابع ریاضی ۳، صفحه‌های ۳ تا ۵)

---

۲۱ – گزینهٔ «۴» (مطلبی تاری)

ابتدا نمودار تابع f را رسم می‌کنیم.

$$f(x)=-x|x-2|=\begin{cases}-x(x-2) & ;x\geq 2\\ x(x-2) & ;x<2\end{cases}$$
$$=\begin{cases}-x^2+2x & ;x\geq 2\\ x^2-2x & ;x<2\end{cases}$$



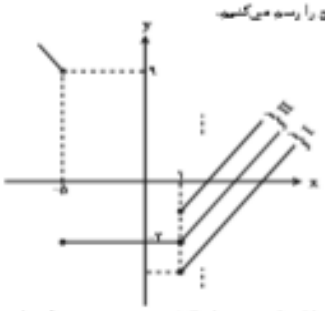
منظور از رابطهٔ $x_1<x_2\Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$ یعنی باید به ازای بازه‌ای باشیم که تابع f در آن اکیداً صعودی باشد. که همانطور که از نمودار f مشخص است تابع در بازهٔ $[1,2]$ یا هر زیرمجموعه‌ای از آن صعودی اکید است.

(تابع ریاضی ۳، صفحه‌های ۶ تا ۱۰)

---

۲۲ – گزینهٔ «۳» (اقتدار کریمی)

ابتدا نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



برای $x\geq 1$، به ازای $x=1$ مقدار $y=a+2$ به دست می‌آید. با توجه به اینکه طبق فرض مسئله تابع f باید در فاصلهٔ $[0,+\infty)$ یکنوا باشد، حالت (II) صورت قابل قبول است. (توجه کنید که شیب خط مثبت است.)

یعنی: $a+2\geq -2\Rightarrow a\geq -4$

(تابع ریاضی ۳، صفحه‌های ۶ تا ۱۰)

---

۲۳ – گزینهٔ «۴» (کبیر کاظمکی)

تابع مورد نظر از دو نیم‌خط با شیب‌های $2m+2-m$ و $2m-2+m$ حاصل شده است و برای اینکه تابع اکیداً نزولی باشد باید شیب هر دو نیم‌خط منفی باشد:

$$\left.\begin{array}{l}2m-2+m<0\Rightarrow m<\frac{1}{2}\\ 2m+2-m<0\Rightarrow m<-1\end{array}\right\}\Rightarrow m<-1 \ (\mathrm{I})$$

از طرفی برای اینکه نمودار از ناحیهٔ اول عبور نکند لازم است که:

$$f(0)\leq 0\Rightarrow m+2\leq 0\Rightarrow m\leq -2 \ (\mathrm{II})$$
$$\xrightarrow{(\mathrm{I})\cap(\mathrm{II})} m\leq -2$$

(تابع ریاضی ۳، صفحه‌های ۶ تا ۱۰)

---

۲۴ – گزینهٔ «۱» (امیرحسین ظفری - ۹۸)

تابع $f(x)=|x+2|+|x-1|$ را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}x+2+x-1=2x+1 & , \quad x>1\\ x+2-(x-1)=3 & , \quad -2\leq x\leq 1\\ -(x+2)-(x-1)=-2x-1 & , \quad x<-2\end{cases}$$

با توجه به ضابطهٔ تابع، اگر $x<-2$، آنگاه تابع f، یک تابع خطی با شیب منفی است و می‌دانیم توابع خطی با شیب منفی اکیداً نزولی هستند، بنابراین تابع در بازهٔ $(-\infty,-2)$ اکیداً نزولی است.

www.mapedu.ir

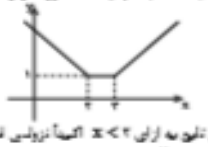
توجه کنید که تابع در بازهٔ $(-\infty , 1)$ نزولی است ولی اکیداً نزولی نیست.

(تابع) (ریاضی ۱ صفحه‌های ۶ تا ۱۰)

---

۲۵ – گزینهٔ «۱» (اسرا سری تجربی – ۹۷)

نمودار تابع $f(x)=|x-2|+|x-3|$ به صورت زیر است.



ملاحظه می‌شود که این تابع به ازای $x<2$ اکیداً نزولی است که در این صورت عبارت‌های داخل هر دو قدر مطلق منفی هستند.

بنابراین: $x<2 : f(x)=-(x-2)-(x-3)=-2x+5$

حال باید بررسی کنیم معادلهٔ $\underbrace{2x^2-x-10}_{g(x)}=\underbrace{-2x+5}_{f(x);x<2}$ چند جواب در $x<2$ دارد.

$$2x^2+x-15=0 \Rightarrow (2x-5)(x+3)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5}{2}>2 & \times \\ x=-3<2 & \checkmark \end{cases}$$

(تابع) (ریاضی ۱ صفحه‌های ۶ تا ۱۰)

---

۲۶ – گزینهٔ «۳» (امیر زهدی)

تابع $g(x)=3^{5-x}$ همواره مثبت است پس: $g(2x-1)>0$

$$\frac{g(x^2+1)}{g(2x-1)}\geq 1 \xrightarrow{\times g(2x-1)} g(x^2+1)\geq g(2x-1) \quad (I)$$

از طرفی چون تابع $g(x)$ نزولی اکید است، از (I) نتیجه می‌شود که:

$$x^2+1\leq 2x-1 \Rightarrow x^2-2x+1\leq 0 \Rightarrow 2\leq x\leq 5 \Rightarrow [a,b]\subseteq[2,5]$$

بنابراین $\text{Max}(b-a)$ مساوی ۳ است.

(تابع) (ریاضی ۱ صفحه‌های ۶ تا ۱۰)

---

۲۷ – گزینهٔ «۳» (حسین حمایی)

با توجه به این که بیشترین در مطلق $x=2$ است با تعیین علامت تابع $f(x)$ داریم:

$$f(x)=\begin{cases}(x-2)(x-4) & x\geq 2\\ -(x-2)(x-4) & x<2\end{cases}$$

حال نمودار این تابع را رسم می‌کنیم:

همانطور که از نمودار پیداست، تابع در بازهٔ $[3,4]$ نزولی است پس $a=3, b=4$ و در نتیجه $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$ است.

(تابع) (ریاضی ۱ صفحه‌های ۶ تا ۱۰)

---

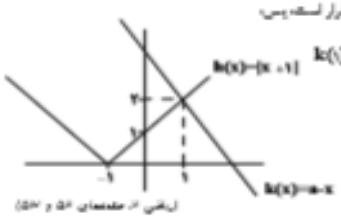
۲۸ – گزینهٔ «۳» (محمدرضا سلیمی‌حسنی)

طبق تعریف تابع اکیداً نزولی اگر $x_1>x_2$ آن‌گاه $f(x_1)<f(x_2)$، پس:

$$f\left(\frac{a-x+2}{2+|x+1|}\right)\geq f(1) \Rightarrow \frac{a-x+2}{2+|x+1|}\leq 1$$

$$\Rightarrow a-x+2\leq 2+|x+1| \Rightarrow a-x\leq |x+1|$$

نامساوی فقط به ازای $x\geq 1$ تکرار است، پس:



$$k(1)=h(1)=2 \Rightarrow a-1=2$$
$$\Rightarrow a=3$$

(ریاضی ۱ صفحه‌های ۵۵ و ۵۶)

(تابع) (ریاضی ۱ صفحه‌های ۶ تا ۱۰)

---

۲۹ – گزینهٔ «۱» (بابک سادات)

با توجه به تمرین کتاب درسی در صفحهٔ ۶، این عبارت $(x,1)$ مجموعه و همان‌طور مقدار $b-a$ برابر یک است.

(تابع) (ریاضی ۱ صفحهٔ ۶)

---

۳۰ – گزینهٔ «۳» (اسرا سری تجربی تابع ارگشود – ۹۸)

ابتدا تابع f را به صورت چندضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$f(x)=|x+1|-|x-2|$$

$$=\begin{cases} x+1-(x-2)=3 & , \quad x>2 \\ x+1+(x-2)=2x-1 & , \quad -1\leq x\leq 2 \\ -(x+1)+(x-2)=-3 & , \quad x<-1 \end{cases}$$

همانطور که ملاحظه می‌کنید در بازه‌ی $(-1,2)$، تابع f یک تابع خطی با شیب مثبت است که می‌دانیم تابع خطی با شیب مثبت اکیداً صعودی هستند.

(تابع) (ریاضی ۱ صفحه‌های ۶ تا ۱۰)

---

۳۱ – گزینهٔ «۱» (مهدیار عابزاده)

شرط آن‌که رابطهٔ f تابع باشد، آن است که مؤلفه‌های اول آن برابر نباشند و یا اگر مؤلفه‌های اول آن برابر باشند، باید مؤلفه‌های دوم نیز برابر باشند.

$$(2,a^2-2a),\ (2,1)\in f \Rightarrow a^2-2a=1$$

$$\Rightarrow a^2-2a-1=0$$

$$\Rightarrow a=1\pm\sqrt{2} \Rightarrow f=\{(2,1),(1,2),(1,-1),(2,1)\}$$

با جای‌گذاری $a=1\pm\sqrt{2}$ در رابطهٔ f دو زوج $(1,2)$ و $(1,-1)$ در رابطه قرار دارند، پس به‌ازای هیچ مقداری از a، رابطهٔ f تابع نخواهد شد.

(تابع) (ریاضی ۱ صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۰)

---

۳۲ – گزینهٔ «۲» (کاظم تبلیغی)

با توجه به مجموعهٔ جواب‌های نامعادلهٔ $x^2\leq|x|$ و $x^2\geq|x|$، ضابطه‌های f را به‌صورت زیر می‌توان نوشت:

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx & ; x\in\{0\}\cup(-\infty,-1]\cup[1,+\infty) \\ 2x^2+c & ; x\in[-1,1] \end{cases}$$

برای این که f تابع باشد مقادیر دو ضابطه به ازای $x\in\{0,-1,1\}$ برابر باید باشند:

$$f(0)=0+0=0+c \Rightarrow c=0$$

$$\left.\begin{array}{l} f(1)=a+b=2+c \Rightarrow a+b=2 \\ f(-1)=a-b=2+c \Rightarrow a-b=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=0 \end{cases}$$

(تابع) (ریاضی ۱ صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۰)

---

۳۳ – گزینهٔ «۴» (سعید بحری)

$$(a,a^2-2)=(a,3a-4) \Rightarrow a^2-2=3a-4 \Rightarrow a^2-3a+2=0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ a=2 \end{cases} \text{یا}$$

اگر $a=2 \Rightarrow f=\{(2,2),(2,2),(2,2),(\underbrace{8-6}_{2},b)\} \Rightarrow b=2$

$$\Rightarrow a^2-b^2=2-2=0$$

اگر $a=1 \Rightarrow f=\{(2,1),(1,-1),(1,-1),(-5,b)\}$

$\Rightarrow$ b هر مقدار می‌تواند باشد. $\Rightarrow 1^2-b^2\leq 1$

$$\Rightarrow (a^2-b^2)\in(-\infty,1]$$

(تابع) (ریاضی ۱ صفحه‌های ۹۵ تا ۱۰۰)

---

www.mapedu.ir

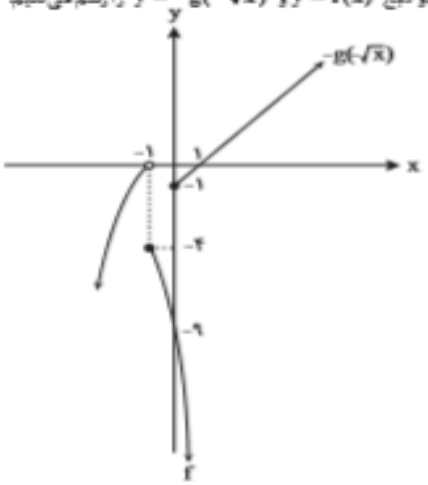
۳۴ ــ گزینهٔ «۱» (امیرهوشنگ انصاری)

$f(x)+g(-\sqrt{x})=0 \Rightarrow f(x)=-g(-\sqrt{x})$

محل برخورد نمودارهای دو تابع $y=f(x)$ و $y=-g(-\sqrt{x})$ جوابهای معادله است. $g(x)=-x^2+1 \Rightarrow g(-\sqrt{x})=-(-\sqrt{x})^2+1=-x+1$

$\Rightarrow g(-\sqrt{x})=-x+1, x\ge 0 \Rightarrow -g(-\sqrt{x})=x-1, x\ge 0$

حال نمودار دو تابع $y=f(x)$ و $y=-g(-\sqrt{x})$ را رسم می‌کنیم:



همانطور که می‌بینید نمودار دو تابع هیچ تقاطعی با هم ندارند.

(ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۳)
(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳ تا ۵)

---

۳۵ ــ گزینهٔ «۳» (اسروش مولایی)

$g(x)=f(x-1)+2=(x-1)^3+2 \Rightarrow g(\sqrt[3]{4}+1)=(\sqrt[3]{4})^3+2=6$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳ تا ۵)

---

۳۶ ــ گزینهٔ «۳» (مسیرن ماهیلو)

گزینه‌ی (۳) نادرست است زیرا در بازه‌ی $[3,4)$ با حرکت روی نمودار از چپ به راست همواره رو به بالا خواهیم رفت، ولی در نقطه‌ی $x=4$ رو به پایین می‌رویم، پس در بازه‌ی $[3,4]$ تابع نه صعودی است و نه نزولی.

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶ تا ۱۰)

---

۳۷ ــ گزینهٔ «۲» (فرزانه دانایی)

نمودار تابع g، گزینه‌ی نمودار تابع f نسبت به محور x هاست. از آنجایی که جهت حرکت f و $-f$ خلاف یکدیگر است، پس باید بازه‌ای را انتخاب کنیم که تابع f در آن نزولی غیراکید و تصنعی است که بازه‌ی $[0,4]$ خواهد بود.

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶ تا ۱۰)

---

۳۸ ــ گزینهٔ «۱» (فرزانه دانایی)

$f(x)=[x] \ , \ g(x)=\frac{x}{1-x}$

$\Rightarrow g(\sqrt{2})=\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}\times\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}+2}{-1}=-\sqrt{2}-2\simeq -3/4$

$(fog)(\sqrt{2})=f(g(\sqrt{2}))=f(-\sqrt{2}-2)=[-\sqrt{2}-2]=-4$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۴)

۳۹ ــ گزینهٔ «۴» (پیام عمدلویی)

$$(fof)(x)=f(f(x))=\frac{1-\frac{1-x}{1+x}}{1+\frac{1-x}{1+x}}=\frac{2x}{2}=x$$

$$\Rightarrow (fofof)(x)=f(\underbrace{(fof)(x)}_{x})=f(x)$$

بنابراین اگر تعداد ترکیب‌های متوالی f، زوج باشد، حاصل x خواهد بود و اگر فرد باشد، حاصل $f(x)$ خواهد بود، بنابراین:

$$(\underbrace{fofofo...of}_{\text{۱۳۹۱ مرتبه}})(x)=f(x)$$

$$\xrightarrow{x=\sqrt{2}} f(\sqrt{2})=\frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\times\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}=\frac{(1-\sqrt{2})^2}{1-2}$$

$$=-(1-\sqrt{2})^2$$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۴)

---

۴۰ ــ گزینهٔ «۳» (ایمان چینی‌فروشان)

$(fog)(3)=f(g(3))$

برای یافتن $g(3)$ با استفاده از $g(x+1)$، کافی است قرار دهیم: $x+1=3$، بنابراین: $x=2$، پس: $g(x+1)=3^{2x-3}-5$

$\xrightarrow{x=2} g(3)=3^{4-3}-5=3-5=-2$

بنابراین: $f(g(3))=f(-2)$، برای یافتن $f(-2)$ با استفاده از $f(x-1)$، کافی است قرار دهیم: $x-1=-2$، بنابراین: $x=-1$، پس:

$f(x-1)=3^{2x+3}+1$

$\xrightarrow{x=-1} f(-2)=3^{-4+3}+1=\frac{1}{3}+1=\frac{3}{3}$

بنابراین: $(fog)(3)=\frac{3}{3}$.

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۴)

---

۴۱ ــ گزینهٔ «۳» (محمد بحیرایی)

با توجه به شکل داریم:

$f=\{(1,3),(2,5),(-1,1)\}$

$g=\{(0,1),(5,-3),(4,-1)\}$

برای محاسبه‌ی تابع fog از دامنه‌ی g شروع می‌کنیم:

$x=0:(fog)(0)=f(g(0))=f(1)=3 \Rightarrow (0,3)\in fog$

$x=5:(fog)(5)=f(g(5))=f(-3)$: وجود ندارد

$x=4:(fog)(4)=f(g(4))=f(-1)=1 \Rightarrow (4,1)\in fog$

$\Rightarrow fog=\{(0,3),(4,1)\}$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۴)

۴۲ ــ گزینهٔ «۴» (سراسری تجربی ۹۶)

راه حل اول:

$$g(f(x))=g\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)=\frac{2\left(\frac{2x-1}{x+1}\right)+2}{2-\frac{2x-1}{x+1}}=\frac{\frac{4x-2+2x+2}{x+1}}{\frac{2x+2-2x+1}{x+1}}$$

$$=\frac{6x}{3}=2x$$

راه حل دوم: با توجه به ضابطه‌های f و g، مقدار $g(f(\frac{1}{2}))$ را به‌دست آورده و گزینه‌ای را انتخاب می‌کنیم که به ازای $x=\frac{1}{2}$ با عدد به‌دست آمده برابر باشد.

گزینه‌ی (۴) درست است. $f(\frac{1}{2})=0 \Rightarrow g(f(\frac{1}{2}))=g(0)=1 \Rightarrow$

توجه کنید: گزینه‌های تست کامل نیستند، زیرا باید دامنه‌ی تابع نیز در کنار آن نوشته می‌شد، اما به نظر می‌آید که فقط ضابطه مد نظر طراح بوده است.

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۴)

www.mapedu.ir

۴۳ – گزینهٔ «۱» (فرهاد عامی)

ابتدا دامنه‌ی تابع fog را یافته و سپس ضابطه‌ی آن را تشکیل می‌دهیم:

$$f(x)=\frac{x}{x-1}\ ,\ x-1\neq 0 \Rightarrow x\neq 1$$

$$g(x)=\frac{1}{x}\ ,\ x\neq 0$$

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x\neq 0 \mid \underbrace{\frac{1}{x}\neq 1}_{x\neq 1}\}=\{x\neq 0\ ,\ 1\}$$

$$\Rightarrow D_{fog}=R-\{0\ ,\ 1\}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\frac{1}{x})=\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}-1}=\frac{1}{1-x}\ ,\ x\neq 0\ ,\ 1$$

چون در تابع گویای $y=\frac{1}{1-x}$ ، مخرج مخالف صفر است، در نتیجه $x\neq 1$ ، پس می‌توان $x\neq 1$ را ننوشت.

$$\Rightarrow (fog)(x)=\frac{1}{1-x}\ ,\ x\neq 0$$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱ تا ۱۴)

۴۴ – گزینهٔ «۲» (بهمن عاشوری)

در تابع ثابت، مؤلفه‌های دوم همهٔ زوج‌های مرتب یکسانند:

$$\Rightarrow k^2+6=7k=\frac{b}{2}$$

$$\Rightarrow k^2-7k+6=(k-6)(k-1)=0 \Rightarrow k=1 \text{ یا } 6$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k=1=\frac{b}{12} \Rightarrow b=12 \Rightarrow b-k=13 \\ \text{یا} \\ k=6=\frac{b}{12} \Rightarrow b=84 \Rightarrow b-k=78 \end{cases}$$

(تابع) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۸ تا ۱۳)

---

۴۵ – گزینهٔ «۲» (یاسین سپهر)

تمایش جبری تابع خطی f به‌صورت $f(x)=ax+b$ می‌باشد.

$$f(x)=ax+b \Rightarrow f(x-2)=a(x-2)+b$$

$$,\ f(x+2)=a(x+2)+b$$

$$\Rightarrow f(x-2)+f(x+2)=ax-2a+b+ax+2a+b$$

$$=6x+7 \Rightarrow 2ax+(-a+2b)=6x+7$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2a=6 \Rightarrow a=3 \\ -a+2b=7 \Rightarrow -3+2b=7 \Rightarrow b=5 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x)=3x+5 \Rightarrow f(-1)=2$$

(تابع) (ریاضی ۱، صفحهٔ ۱۰۳)

---

۴۶ – گزینهٔ «۲» (نادعلی پروازی)

$$f(x)=\frac{1}{3}(x^3-3x^2+3x)=\frac{1}{3}(x^3-3x^2+3x-1+1)$$

$$=\frac{1}{3}\left((x-1)^3+1\right)=\frac{1}{3}(x-1)^3+\frac{1}{3}$$

حال برای اینکه به نمودار تابع $y=\frac{1}{3}x^3$ برسیم باید یک واحد به چپ و $\frac{1}{3}$ واحد به پایین انتقال دهیم:

$$y=f(x)\xrightarrow[x\to x+1]{\text{یک واحد به چپ}} y=\frac{1}{3}(x^3+1)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}$$

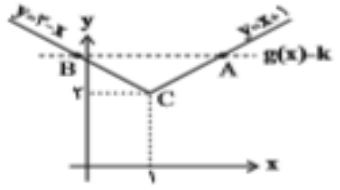
$$\xrightarrow{\frac{1}{3}\text{واحد به پایین}} g(x)=\frac{1}{3}x^3$$

(تابع) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۷)

۴۷ – گزینهٔ «۲» (نادعلی پروازی)

نمودارهای تابع f و g را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{(x-1)^2}+2=|x-1|+2$$



مختصات نقاط A و B را می‌یابیم:

$$x_A: x+1=k \Rightarrow x=k-1$$

$$x_B: 3-x=k \Rightarrow x=3-k$$

پس در مثلث ABC داریم:

$$\begin{cases} \text{قاعده}=x_A-x_B=2k-4 \\ \text{ارتفاع}=k-2 \end{cases}$$

$$S=\frac{(2k-4)(k-2)}{2}=(k-2)^2=9$$

$$\Rightarrow (k-2)=\pm 3 \xrightarrow{k>2} k=5$$

(تابع) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۷)

۴۸ – گزینهٔ «۲» (صادق منصوری)

هر دو ضابطهٔ تابع f در دامنه‌هایشان ثابت هستند، این یعنی اگر تابع همانی $y=x$ نمودار تابع f را قطع کند، تابع ثابت $y=1-2k$ را در بازهٔ $[-1\ ,\ 1)$ و تابع ثابت $y=\frac{1}{2}+3k$ را در بازهٔ $[1\ ,\ 5]$ قطع می‌کند:

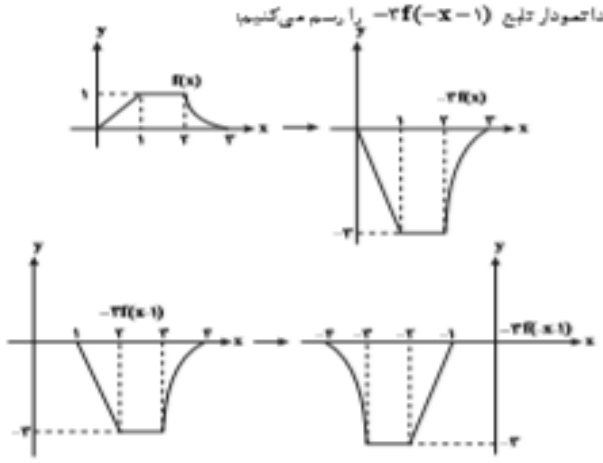
$$\begin{cases} -1\leq 1-2k<1 \Rightarrow -1<2k-1\leq 1 \Rightarrow 0<k\leq 1 \\ 1\leq \frac{1}{2}+3k\leq 5 \Rightarrow \frac{1}{6}\leq k\leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

پس اگر k عضو بازهٔ $(0\ ,\ 1]\cup[\frac{1}{6}\ ,\ \frac{3}{2}]=(0\ ,\ \frac{3}{2}]$ باشد، قطعاً تابع f یک نقطهٔ مشترک با تابع $y=x$ دارد، در نتیجه به‌ازای $k\in R-(0\ ,\ \frac{3}{2}]$ ، این نمودارها تقاطعی ندارند. مجموعهٔ مورد نظر شامل عدد صحیح $k=1$ نیست.

(تابع) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۰ تا ۱۷)

۴۹ – گزینهٔ «۳» (بهدار زاوطلب)

ابتدا نمودار تابع $-3f(-x-1)$ را رسم می‌کنیم:



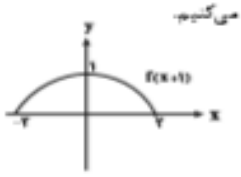
ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۳ تا ۱۷) ریاضی ۲، صفحه‌های ۸۱ تا ۸۶)

(تابع) ریاضی ۳، صفحه‌های ۶ تا ۱۰ و ۱۵ تا ۲۳)

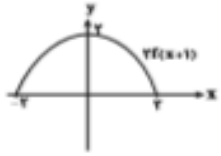
www.mapedu.ir

۵۰ ــ گزینهٔ «۴» (مصطفی پندواری)

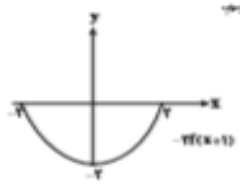
ابتدا نمودار تابع f را یک واحد به سمت چپ منتقل می‌کنیم.



سپس عرض نقاط را ۲ برابر می‌کنیم.



و در انتها نمودار را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.



(ریاضی ۱، مقدمه‌ی ۳۳ تا ۱۱۲) (ریاضی ۳، مقدمه‌ی ۶۸ تا ۷۰)
(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ی ۱۵ تا ۲۳)

---

۵۱ ــ گزینهٔ «۴» (بهار رازقدانس)

فرض می‌کنیم $g(x)=2-f(-\frac{x}{2})$. با توجه به نمودار داریم:

$$-4\le x\le 8 \Rightarrow D_f: -2\le \frac{2-x}{2}\le 2 \Rightarrow -2\le \frac{-x}{2}\le 2$$

$$\Rightarrow -4\le x\le 4 \Rightarrow D_g=[-4,4]$$

برد تابع به‌صورت: $-2\le y\le 2 \Rightarrow -1\le 2-y\le 4 \Rightarrow R_g=[-1,4]$

$$D_g\cup R_g \Rightarrow [-4,4]$$

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ی ۱۵ تا ۲۳)

---

۵۲ ــ گزینهٔ «۳» (وحید انصاری)

مختصات نقطهٔ $(-4,1)$ را در تابع اولیه قرار می‌دهیم:

$2f(-5)+1=1 \Rightarrow f(-5)=0$ یعنی مرکز تقارن تابع $f(x)$ برابر $(-5,0)$ است. پس $x-2=-5 \Rightarrow x=-3$ و $y=-\frac{1}{2}(0)-1=-1$. درنتیجه مرکز تقارن تابع جدید $(-3,-1)$ خواهد بود.

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ی ۱۵ تا ۲۳)

---

۵۳ ــ گزینهٔ «۳» (بهنام ظهیرالدین)

$g(x)=a(x-b)^3+c$ با توجه به نمودار داده شده، در ابتدا یک تابع درجهٔ سوم به فرم $y=x^3$ بوده که دو واحد به سمت راست و یک واحد به سمت پایین انتقال پیدا کرده است، پس $b=2$ و $c=-1$ یعنی داریم:

$g(x)=a(x-2)^3-1$. از طرفی عرض از مبدأ این تابع با توجه به شکل برابر ۳ است یعنی $g(0)=3$، پس:

$$a(0-2)^3-1=3 \Rightarrow -8a=4 \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow g(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^3-1$$

حال طبق صورت سوال داریم $(gof)(-3)=\frac{m}{2}$ یعنی:

$$g(f(-3))=\frac{m}{2} \xrightarrow{f(-3)=1} g(1)=\frac{m}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2}(1-2)^3-1=\frac{m}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2}=\frac{m}{2} \Rightarrow m=-1$$

و نما در نهایت خواستهٔ مسأله:

$$(f+2g)(-m)=? \xrightarrow{m=-1} (f+2g)(1)=f(1)+2g(1)$$

$$=5+2(-\frac{1}{2})=4$$

(ریاضی ۳، مقدمه‌ی ۶۵ تا ۷۰)
(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ی ۳۰ تا ۵۰، ۱۱۲ تا ۱۲۴ و ۲۲ و ۲۳)

---

۵۴ ــ گزینهٔ «۱» (سهیل حسن‌نژادپور)

ابتدا از روی توابع $g(x)$ و $f(x)$، تابع $(gof)(x)$ را تشکیل می‌دهیم.

$$\begin{cases} g(x)=3x+a \\ f(x)=x^2-bx+c \end{cases} \Rightarrow (gof)(x)=3(x^2-bx+c)+a$$

$$=3x^2-3bx+3c+a$$

حال عبارت فوق را معادل $gof(x)$ داده شده در صورت سوال قرار می‌دهیم:

$$3x^2\underline{-3b}x+\overline{3c+a}=3x^2\underline{+6}x\overline{-2} \Rightarrow \begin{cases} -3b=6 \Rightarrow b=-2 \\ 3c+a=-2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 3c+2b+a=2b+(3c+a)=2(-2)+(-2)=-6$$

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ی ۱۱۲ تا ۱۲۴ و ۲۲ و ۲۳)

---

۵۵ ــ گزینهٔ «۱» (سهیل حسن‌نژادپور)

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x>0 \\ \frac{1}{2} & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases} \quad , g(x)=x^2-5x+6=0 \Rightarrow x=2,3$$

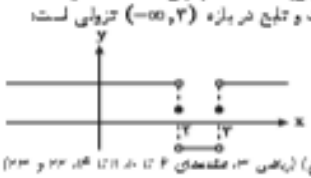
x	$-\infty$		2		3		$+\infty$
x^2-5x+6		+	0	−	0	+	

$$2<x<3 \Rightarrow g(x)<0 \Rightarrow f(g(x))=-1$$

$$x=2,3 \Rightarrow g(x)=0 \Rightarrow f(g(x))=\frac{1}{2}$$

$$x<2 \text{ یا } x>3 \Rightarrow g(x)>0 \Rightarrow f(g(x))=1$$

بنابراین نمودار تابع fog به شکل زیر است و تابع در بازه $(-\infty,3)$ نزولی است:



(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ی ۶ تا ۱۰، ۱۱۲ تا ۱۲۴ و ۲۲ و ۲۳)

---

۵۶ ــ گزینهٔ «۳» (مصطفی پندواری)

$$f(g(x))=a(x-0)(x-2)=ax(x-2)$$

$$(2,8)\in f(g(x)) \Rightarrow 8=a\times 2\times 2 \Rightarrow a=1$$

$$\Rightarrow f(g(x))=x^2-2x$$

همچنین با توجه به نمودار ضابطهٔ تابع g برابر است با: $g(x)=2x$

$$f(2x)=x^2-2x=\frac{(2x)^2}{4}-2x \xrightarrow{t=2x} f(t)=\frac{t^2}{4}-t$$

$$x=\frac{1}{2} \to f(g(\frac{1}{2}))=f(1)=\frac{1}{4}-1=\frac{-3}{4}$$

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ی ۱۱۲ تا ۱۲۴ و ۲۲ و ۲۳)

---

۵۷ ــ گزینهٔ «۲» (سهیل حسن‌نژادپور)

برای یافتن ضابطهٔ $g(x)$، ابتدا $f(x)$ را برابر t در نظر می‌گیریم تا x را تنها کنیم:

$$\frac{x}{3-x}=t \Rightarrow x=3t-tx \Rightarrow x=\frac{3t}{t+1}$$

www.mapedu.ir

$$g(\underbrace{f(x)}_{t}) = \underbrace{2x}_{\frac{2t}{t+1}} - 1 \Rightarrow g(t) = \frac{6t}{t+1} - 1 = \frac{5t-1}{t+1} \Rightarrow g(x) = \frac{5x-1}{x+1}$$

حال در عبارت فوق به‌جای x، $2x+1$ قرار می‌دهیم:

$$g(2x+1) = \frac{5(2x+1)-1}{2x+1+1} = \frac{10x+4}{2x+2} = \frac{5x+2}{x+1}$$

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۱۱ تا ۱۵، ۲۲ و ۲۳)

---

۵۸ ــ گزینهٔ «۲» (اسماعیل محسن‌نژادپور)

ابتدا تابع $f(x)$ را به کمک اتحاد مکعب کامل ساده می‌کنیم:

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x - 8 + 8 = (x-2)^3 + 8$$

حال به‌جای x در تابع $f(x)$، $g(x)$ را قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} f(g(x)) = (g(x)-2)^3 + 8 \\ f(g(x)) = x^3 - 2x \end{cases} \Rightarrow (g(x)-2)^3 + 8 = x^3 - 2x$$

$$\Rightarrow (g(x)-2)^3 = x^3 - 2x - 8 = (x-1)^3 - 9$$

$$\Rightarrow g(x) = \sqrt[3]{(x-1)^3 - 9} + 2$$

پس برای ساخت تابع $g(x)$ از روی تابع $y = \sqrt[3]{x^3 - 9}$ باید آن را ۱ واحد به راست و ۲ واحد به سمت بالا ببریم.

(تابع) (ریاضی ۱، مقدمه‌ای ۱۳ تا ۱۷) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۱۱ تا ۱۵، ۲۲ و ۲۳)

---

۵۹ ــ گزینهٔ «۱» (سروش موذنی)

می‌خواهیم جواب f بشود ۴. پس باید در ضابطهٔ بالا به‌جای x، عدد ۴ یا در ضابطهٔ پایین عدد ۲- قرار گیرد. پس دنبال $f(x) = 4$ یا $f(x) = -2$ هستیم:

$$\text{ضابطهٔ بالا} \begin{cases} 2x - 5 = 4 \Rightarrow x = \frac{9}{2} \quad \text{ق ق} \\ 2x - 5 = -2 \Rightarrow x = \frac{3}{2} \quad \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\text{ضابطهٔ پایین} \begin{cases} |x-1| = 4 \Rightarrow x = -3, 5 \Rightarrow x = -3 \quad \text{ق ق} \\ |x-1| = -2 \Rightarrow x \in \varnothing \end{cases}$$

پس x باید ۳- یا $\frac{9}{2}$ باشد و جمع ریشه‌های معادله می‌شود: ۱/۵

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۱۱ تا ۱۵، ۲۲ و ۲۳)

---

۶۰ ــ گزینهٔ «۱» (وحید انصاری)

$$y = f(x) = 2\sqrt{x+3} - 1$$

سه واحد به راست $y = 2\sqrt{x} - 1$

دو واحد به پایین $g(x) = 2\sqrt{x} - 3 \Rightarrow D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$

① $x \in D_f \Rightarrow x \geq -3$

② $D_g : [0, +\infty) \Rightarrow 2\sqrt{x+3} - 1 \geq 0 \Rightarrow x + 3 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow x \geq -2/75$

$D_{gof} : [-2/75, +\infty)$

دامنهٔ تابع gof شامل سه عدد صحیح مثبت، ۰ و ۱- و ۲- است.

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۱۱ تا ۱۵، ۲۲ و ۲۳) (ریاضی ۱، مقدمه‌ای ۱۳ تا ۱۷)

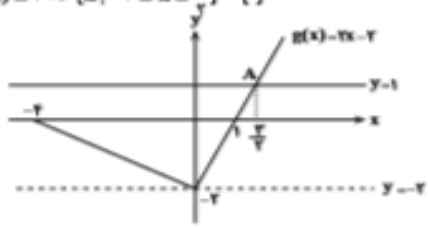
---

۶۱ ــ گزینهٔ «۱» (امیرهوشنگ انصاری)

چون $D_f = (-3, 1]$، باید تابع g را بین دو خط افقی $y = -2$ و $y = 1$ قرار دهیم تا محدودهٔ x به‌دست آید.

پس: $2x - 3 = 1 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$ طول نقطه A

$$-2 < g(x) \leq 1 \Rightarrow \{x \mid -3 \leq x \leq \frac{3}{2}\} - \{0\}$$



خط $y = -2$ به دلیل مساوی نداشتن به‌صورت خط‌چین رسم شده یعنی محل برخورد نمودار g و این خط را نمی‌خواهیم.

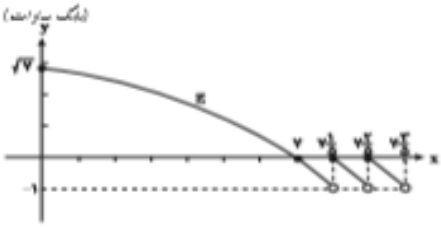
$D_{gof} = [-3, \frac{3}{2}] - \{0\}$

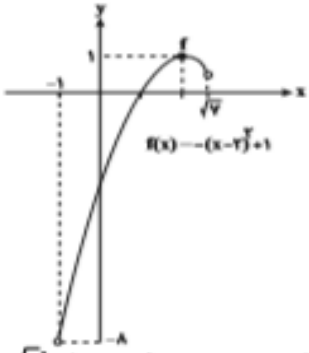
اعداد صحیح این بازه عبارتند از: $\{-3, -2, -1, 1\}$

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۱۱ تا ۱۵، ۲۲ و ۲۳)

---

۶۲ ــ گزینهٔ «۲» (بابک سیاوشی)





با رسم نمودار g به‌راحتی متوجه می‌شویم که برد g بازه $(-1, \sqrt{7}]$ است که لان دامنهٔ تابع f محسوب می‌شود. حالا باید ببینیم که برد f با توجه به دامنهٔ $(-1, \sqrt{7}]$ چه بازه‌ای می‌شود. از روی نمودار مشخص است که برد تابع بازه $(-8, 1]$ بوده و طول بازه یا بیشترین مقدار $b - a$، ۹ واحد می‌شود.

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۵۴ تا ۵۶) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۱۱ تا ۱۵، ۲۲ و ۲۳)

---

۶۳ ــ گزینهٔ «۳» (لقمان‌اصغر شریفی)

با توجه به آن‌که $[x]$ عددی صحیح است، پس به یکی از صورت‌های $3k$، $3k+1$ یا $3k+2$ قابل تمثیل است. $(k \in \mathbb{Z})$ بنابراین تابع f را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & [x] = 3k \\ x - 1 & [x] = 3k + 1 \\ x - 1 & [x] = 3k + 2 \end{cases} \quad ; k \in \mathbb{Z}$$

چون $[x]$ سه حالت دارد، پس به جدول زیر می‌رسیم:

$[x]$	$f(x)$	$[f(x)]$	$f(f(x))$	$[f(f(x))]$	$f(f(f(x)))$
$3k$	$x+2$	$3k+2$	$f(x)-1=x+1$	$3k+1$	$f(f(f(x)))=1-x$
$3k+1$	$x-1$	$(3k+1)-1=3k$	$f(x)+2=x+1$	$(3k+1)+1=3k+2$	$f(f(f(x)))=1-x$
$3k+2$	$x-1$	$(3k+2)-1=3k+1$	$f(x)-1=x-2$	$(3k+2)-2=3k$	$f(f(f(x)))=2-x$

همان‌طور که در جدول بالا مشاهده می‌شود، به ازای هر ۳ حالت داریم:

$$fofof(x) = f(f(f(x))) = x \Rightarrow fofofof(x) = f(x)$$

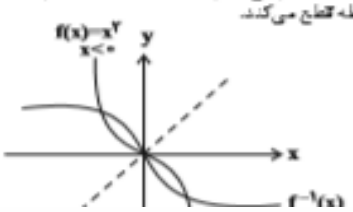
(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۵۴ تا ۵۶) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۱۱ تا ۱۵، ۲۲ و ۲۳)

---

۶۴ ــ گزینهٔ «۴» (مهدی عبدازاده)

$$f(x) = -x|x| = \begin{cases} -x(x) & x \geq 0 \\ -x(-x) & x < 0 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} -x^2 & x \geq 0 \\ x^2 & x < 0 \end{cases}$$

ابتدا نمودار $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم سپس برای رسم $f^{-1}(x)$، قرینه $f(x)$ را نسبت به خط $y = x$ رسم می‌کنیم. با توجه به نمودار رسم شده تابع $f(x)$ وارون خود را در سه نقطه قطع می‌کند.



www.mapedu.ir

۶۵ــ گزینهٔ «۲» *(اکبر کدخدایی)*

$$y=\begin{cases}5x-3 & x\ge 1\\ -x+3 & 0<x<1\\ -5x+3 & x\le 0\end{cases}$$

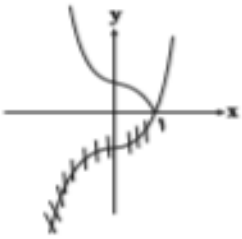
تابع در بازه‌های $(-\infty,1)$ و $(1,+\infty)$ یک‌به‌یک است. پس بیشترین مقدار a برابر ۱ است. *(ریاضی ۱، صفحه‌ی ۱۰۹ تا ۱۱۳)*

(تابع) (ریاضی ۲، صفحه‌ی ۵۷ تا ۶۴) (ریاضی ۳، صفحه‌ی ۲۴ تا ۲۶)

۶۶ــ گزینهٔ «۲» *(سروش مؤاخذی)*

$f(x)=|x^3-1|$ به شکل زیر در فاصله $(-\infty,1)$ بایرد $(0,+\infty)$ نزولی است.

در این بازه داریم:



$$y=|x^3-1|\xrightarrow[x^3-1<0]{x<1} y=-(x^3-1)=1-x^3$$

$$\xrightarrow{\text{دو واحد به راست}} y=1-(x-2)^3 \xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}}$$

$$g(x)=2-(x-2)^3$$

پس داریم:

$$g(x)=-1\Rightarrow (x-2)^3=3\Rightarrow g^{-1}(-1)=2+\sqrt[3]{3}$$

(ریاضی ۱، صفحه‌ی ۱۳۰ تا ۱۳۲)

(ریاضی ۲، صفحه‌ی ۵۷ تا ۶۴)

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌ی ۲۰ تا ۲۱ و ۲۴ تا ۲۶)

۶۷ــ گزینهٔ «۴» *(محمد نوین‌ار)*

در ضابطهٔ تابع f، زیر رادیکال باید بزرگتر یا مساوی صفر باشد. با یک تعیین علامت ساده می‌توان نتیجه گرفت $D_f=(-\infty,-1]\cup[4,+\infty)$. از طرف دیگر واضح است که $D_g=\mathbb{R}$، بنابراین:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

$$=\{x\in\mathbb{R} \mid |x|-1\in(-\infty,-1]\cup[4,+\infty)\}$$

$$|x|-1\le -1\Rightarrow |x|\le 0\Rightarrow x=0$$

$$|x|-1\ge 4\Rightarrow |x|\ge 5\Rightarrow x\ge 5 \text{ یا } x\le -5$$

در نتیجه:

$$D_{fog}=(-\infty,-5]\cup\{0\}\cup[5,+\infty)$$

همچنین داریم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

$$=\{x\in(-\infty,-1]\cup[4,+\infty) \mid \sqrt{x^2-2x-4}\in\mathbb{R}\}$$

$$=(-\infty,-1]\cup[4,+\infty)$$

از اجتماع D_{fog} و D_{gof} جواب $(-\infty,-1]\cup\{0\}\cup[4,+\infty)$ به‌دست می‌آید که شامل سه عدد صحیح $\{1,2,3\}$ نمی‌باشد.

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌ی ۱۰ تا ۱۵ و ۲۲ و ۲۳)

۶۸ــ گزینهٔ «۱» *(ایلک سادات)*

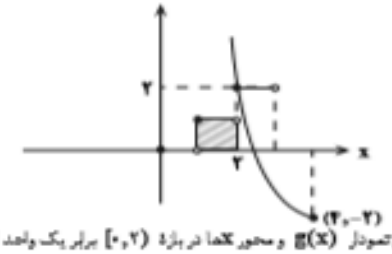
$$y=f(x)=4-\sqrt{x+2}\qquad D_f=[-2,+\infty),\ R_f=(-\infty,4]$$

$$y=4-\sqrt{x+2}\Rightarrow 4-y=\sqrt{x+2}$$

$$\Rightarrow 16+y^2-8y=x+2\Rightarrow x=y^2-8y+14$$

بنابراین ضابطهٔ تابع وارون f به‌صورت $f^{-1}(x)=x^2-8x+14$ و دامنهٔ آن $D_{f^{-1}}=(-\infty,4]$ خواهد بود. حال کافیست نمودار آن را رسم کنیم و با $g(x)=[x]$ تقاطع دهیم:

مطابق شکل، نمودار تابع f^{-1} محور x ها را در نقطه‌ای به طول $4-\sqrt{2}\simeq 2/6$ (بین ۲ و ۳) قطع کرده و از نقطهٔ (۲و۲) روی تابع $g(x)$ می‌گذرد.



پس مساحت بین نمودار $g(x)$ و محور xها در بازهٔ $[0,2]$ برابر یک واحد است.

(تابع) (ریاضی ۲، صفحه‌ی ۶۰ تا ۶۴)

(ریاضی ۳، صفحه‌ی ۲۴ تا ۲۹)

۶۹ــ گزینهٔ «۱» *(سراسری تجربی خارج از کشور ـ ۹۹)*

قرینه‌ی نمودار تابع $f(x)$ نسبت به محور x ها به‌صورت $-f(x)$ است، پس:

$$f(x)=x^2-2x\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور } x\text{ها}} y=-(x^2-2x)$$

$$\Rightarrow y=-x^2+2x$$

اگر نمودار $y=-x^2+2x$ را ۱۶ واحد در امتداد محور y ها در جهت مثبت انتقال دهیم، نمودار $g(x)=-x^2+2x+16$ به‌دست خواهد آمد.

پس باید نقطه‌ی برخورد دو منحنی f و g را به‌دست آوریم که طول آن از حل معادله‌ی $f(x)=g(x)$ به‌دست می‌آید:

$$x^2-2x=-x^2+2x+16\Rightarrow 2x^2-4x-16=0$$

$$\Rightarrow x^2-2x-8=0\Rightarrow (x-4)(x+2)=0\Rightarrow \begin{cases}x=4\\ x=-2\end{cases}$$

طبق فرض سؤال، دامنه‌ی تابع f به‌صورت $x>1$ است، پس $x=-2$ قابل قبول نیست.

$$x=4\longrightarrow f(4)=4^2-2\times 4=8$$

$\Rightarrow$ نقطه‌ی تقاطع: $A(4,8)$

فاصله‌ی A از مبدأ: $OA=\sqrt{4^2+8^2}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

(تابع) (ریاضی ۲، صفحه‌ی ۱۵ تا ۲۲)

۷۰ــ گزینهٔ «۲» *(سراسری ریاضی خارج از کشور ـ ۹۹)*

برای به‌دست آوردن معادله‌ی قرینه‌ی یک منحنی نسبت به مبدأ مختصات، در معادله‌ی آن x را به $(-x)$ و y را به $(-y)$ تبدیل می‌کنیم:

$$f: y=(x-1)^2$$

$\Rightarrow$ قرینه‌ی f نسبت به مبدأ: $-y=(-x-1)^2$

$$\Rightarrow y=-(x+1)^2$$

سپس منحنی فوق را چهار واحد به بالا منتقل می‌کنیم که معادله‌ی آن به‌صورت $g(x)=-(x+1)^2+4$ خواهد شد که طول نقاط تلاقی آن با منحنی اصلی، از حل معادله‌ی $f(x)=g(x)$ به‌دست می‌آید:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow (x-1)^2=-(x+1)^2+4$$

$$\Rightarrow (x-1)^2+(x+1)^2=4\Rightarrow 2x^2+2=4\Rightarrow x^2=1\Rightarrow x=\pm 1$$

(تابع) (ریاضی ۲، صفحه‌ی ۱۵ تا ۲۲)

۷۱ــ گزینهٔ «۳» *(سراسری تجربی خارج از کشور ـ ۹۷)*

$$f(x)=\sqrt{x}\xrightarrow[\text{محور } y\text{ها}]{\text{قرینه نسبت به}} y=\sqrt{-x}$$

$$\xrightarrow{\text{۲ واحد به راست}} y=\sqrt{-(x-2)}=\sqrt{-x+2}$$

برای یافتن نقاط تلاقی نمودار توابع $y=\sqrt{-x+2}$ و $y=x$ نیمساز ناحیه‌ی اول و سوم، آنها را مساوی هم قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{-x+2}=x\xrightarrow{\text{به توان ۲}} -x+2=x^2\Rightarrow x^2+x-2=0$$

www.mapedu.ir

$$\Rightarrow (x+2)(x-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=-2 \ \text{غ.ق.ق} \end{cases}$$

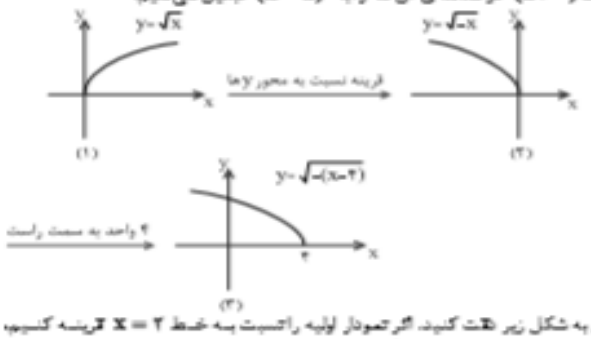
$x=-2$ غیر قابل قبول است، زیرا در معادله‌ی اصلی صدق نمی‌کند.

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۳)

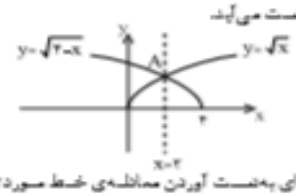
---

۷۲ ــ گزینهٔ «۳» (سراسری ریاضی ــ ۹۹)

برای به‌دست آوردن گزینه‌ی نمودار یک تابع نسبت به محور yها، در معادله‌ی آن x را به $(-x)$ تبدیل می‌کنیم و برای انتقال آن به اندازه‌ی a واحد به سمت راست $(a>0)$ در معادله‌ی آن x را به $(x-a)$ تبدیل می‌کنیم.



حال به شکل زیر دقت کنید. اگر نمودار اولیه را نسبت به خط $x=2$ قرینه کنیم، نمودار مرحله‌ی (۳) به‌دست می‌آید.



توضیح بیشتر آنکه برای به‌دست آوردن معادله‌ی خط مورد نظر، باید مختصات نقطه‌ی A را به‌دست آوریم:

$$\begin{cases} y=\sqrt{x} \\ y=\sqrt{2-x} \end{cases} \Rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{2-x} \Rightarrow x=2-x \Rightarrow 2x=2 \Rightarrow x=1$$

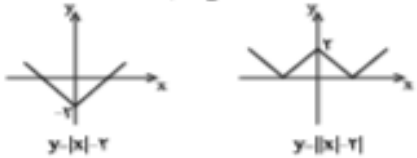
توجه کنید که هیچ‌کدام از این دو نمودار متقارن نیستند، بلکه نسبت به یک خط قرینه‌ی یکدیگرند و منظور طراح قرینه بوده نه متقارن.

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۳)

---

۷۳ ــ گزینهٔ «۴» (سراسری ریاضی ــ ۹۷)

ابتدا نمودار تابع $y=|x|$ را دو واحد به پایین منتقل کرده و سپس قسمت‌های پایین محور xها را نسبت به محور xها قرینه می‌کنیم.

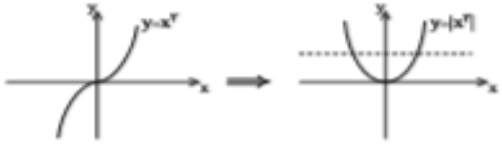


$y=|x|-2$ $\qquad$ $y=||x|-2|$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۵ تا ۲۳)

---

۷۴ ــ گزینهٔ «۳» (سراسری تجربی خارج از کشور ــ ۹۵)



همانطور که در شکل ملاحظه می‌شود خط‌هایی به معادله‌ی $y=k>0$، نمودار تابع $f(x)=|x^2|$ را در دو نقطه قطع می‌کنند. بنابراین تابع f غیر یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است.

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶ تا ۱۰ و ۲۶ تا ۲۹)

---

۷۵ ــ گزینهٔ «۱» (سراسری ریاضی خارج از کشور ــ ۹۱)

از آنجا که دامنه‌ی تابع f، $R-\{0\}$ است، دامنه‌ی تابع $g(x)=(f(\sqrt{x}))^2-f(x)$ به خاطر وجود $\sqrt{x}$، تنها مجموعه‌ی $(0,+\infty)$ است. حال با توجه به ضابطه‌ی f، ضابطه‌ی $f(\sqrt{x})$ را می‌یابیم:

$$f(x)=x^2+\frac{1}{x^2} \Rightarrow f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2+\frac{1}{(\sqrt{x})^2}=x+\frac{1}{x} \quad (*)$$

بنابراین ضابطه‌ی g به صورت زیر خواهد بود:

$$g(x)=(f(\sqrt{x}))^2-f(x) \overset{(*)}{=\!=} (x+\frac{1}{x})^2-(x^2+\frac{1}{x^2})$$

$$=x^2+\frac{1}{x^2}+2(x)(\frac{1}{x})-x^2-\frac{1}{x^2}=2$$

$$\Rightarrow g(x)=2 \ , \ x\in(0,+\infty)$$

پس تابع g یک تابع ثابت است.

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱ تا ۲۹)

---

۷۶ ــ گزینهٔ «۳» (سراسری ریاضی ــ ۹۲)

اگر دو تابع f و f^{-1} وارون هم باشند، آنگاه:

$$(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$$

بنابراین کافی است جای x و y را در گزینه‌ها عوض کرده هر کدام متعلق به تابع f بود، جواب است. که فقط گزینه‌ی (۳) قابل قبول است.

$$(0,1)\in f \Rightarrow (1,0)\in f^{-1}$$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

---

۷۷ ــ گزینهٔ «۳» (کتاب آبی جامع ریاضی تجربی)

اگر دو تابع f و f^{-1} وارون هم باشند، آنگاه: $(a,b)\in f \Leftrightarrow (b,a)\in f^{-1}$

بنابراین:

$$f^{-1}(-5)=4 \Rightarrow f(4)=-5$$

$$f(4)=4^2-4A+3=-5 \Rightarrow A=6$$

بنابراین $f(x)=x^2-6x+3$، برای محاسبه‌ی $f^{-1}(-2)$ خواهیم داشت:

$$f^{-1}(-2)=a \Leftrightarrow -2=f(a)$$

$$\Rightarrow -2=a^2-6a+3$$

$$\Rightarrow a^2-6a+5=0 \Rightarrow (a-1)(a-5)=0$$

$$\xrightarrow{x>3} a=5 \Rightarrow f^{-1}(-2)=5$$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

---

۷۸ ــ گزینهٔ «۳» (سراسری ریاضی ــ ۸۸)

فرض می‌کنیم: $f^{-1}(4)=a \Leftrightarrow f(a)=4$

بنابراین برای پیدا کردن a کافی است معادله‌ی زیر را حل کنیم.

$$f(a)=-a+\sqrt{-2a}=4 \Rightarrow \sqrt{-2a}=4+a \ (\because)$$

$$-2a=16+8a+a^2$$

طرفین معادله را به توان دو می‌رسانیم:

$$\Rightarrow a^2+10a+16=0 \Rightarrow (a+8)(a+2)=0$$

$$\Rightarrow a=-8 \text{ یا } a=-2$$

به ازای $a=-8$، در معادلهٔ $(\because)$، عبارت رادیکالی برابر با مقداری منفی خواهد شد، که غیرقابل‌قبول است، پس $a=-2$.

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۲۴ تا ۲۹)

---

www.mapedu.ir

۷۹ – گزینهٔ «۴» (گاس آی ریاضیات تجربی)

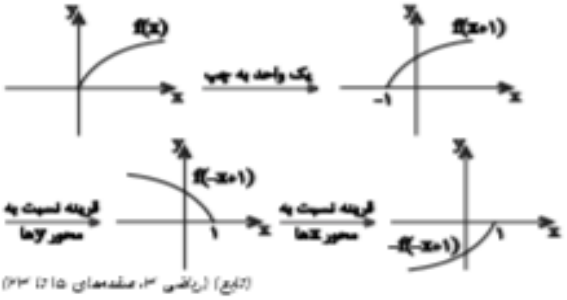
اگر نمودار تابع f یک واحد یا بیش‌تر به چپ یا یک واحد یا بیش‌تر به بالا منتقل شود، آنگاه از ناحیه‌ی چهارم عبور نخواهد کرد.

در گزینهٔ «۴»، تابع f دو واحد به چپ منتقل می‌شود، پس نمودار تابع $f(x+2)$ از ناحیه‌ی چهارم عبور نخواهد کرد.

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵، ۲۲ و ۲۳)

---

۸۰ – گزینهٔ «۴» (گاس آی ریاضیات تجربی)



(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵، ۲۲ و ۲۳)

---

۸۱ – گزینهٔ «۳» (گاس آی ریاضیات تجربی)

با توجه به نمودار $f(0)=2$، از طرفی $f(f(x-2))=2$، بنابراین:

$$f(x-2)=0$$

با توجه به نمودار، صفرهای تابع f که ریشه‌های معادله‌ی $f(x)=0$ هستند، برابر با -3، 1 و 5 است. با اضافه کردن ۲ واحد به طول این نقاط، صفرهای تابع $f(x-2)$ یا ریشه‌های معادله‌ی $f(x-2)=0$ به دست می‌آیند، بنابراین:

$$\begin{cases} x_1=-3+2=-1 \\ x_2=1+2=3 \\ x_3=5+2=7 \end{cases}$$

حاصلضرب ریشه‌ها $=(-1)(3)(7)=-21$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵، ۲۲ و ۲۳)

---

۸۲ – گزینهٔ «۳» (سراسری ریاضی – ۸۸)

می‌دانیم:

$$f(x)=[x]+[-x]=\begin{cases} 0 & ; x\in \mathbb{Z} \\ -1 & ; x\notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

حال تابع $g(f(x))=-2$ را تشکیل می‌دهیم:

$$g(f(x))=\begin{cases} g(0)=0^2+0-2=-2 & ; x\in \mathbb{Z} \\ g(-1)=(-1)^2+(-1)-2=-2 & ; x\notin \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(f(x))=-2\ ;\ x\in \mathbb{R}$$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵، ۲۲ و ۲۳)

---

۸۳ – گزینهٔ «۱» (گاس آی ریاضیات تجربی)

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x^2+2x+1})=\frac{1}{x^2+2x+2}$$

با توجه به فرضیات سوال داریم:

$$(fog)(x)>f(x)\Rightarrow \frac{1}{x^2+2x+2}>\frac{1}{x^2+1}$$

چون در مخرج هر دو کسر $\Delta<0$ و $a>0$، در نتیجه همواره مثبت‌اند، می‌توانیم برای حل نامعادله، طرفین و وسطین را انجام دهیم:

$$\Rightarrow x^2+2x+2<x^2+1\Rightarrow 2x<-1\Rightarrow x<\frac{-1}{2}$$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵، ۲۲ و ۲۳)

---

۸۴ – گزینهٔ «۱» (سراسری ریاضی خارج از کشور – ۹۱)

از آنجا که دامنه‌ی تابع f، $\mathbb{R}-\{0\}$ است، دامنه‌ی تابع $g(x)=(f(\sqrt{x}))^2-f(x)$ به خاطر وجود $\sqrt{x}$، فاصله‌ی $(0,+\infty)$ است.

حال با توجه به ضابطه‌ی f، ضابطه‌ی $f(\sqrt{x})$ را می‌یابیم:

$$f(x)=x^2+\frac{1}{x^2}\Rightarrow f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^2+\frac{1}{(\sqrt{x})^2}=x+\frac{1}{x}\ (*)$$

بنابراین ضابطه‌ی g به صورت زیر خواهد بود:

$$g(x)=(f(\sqrt{x}))^2-f(x)\overset{(*)}{=}(x+\frac{1}{x})^2-(x^2+\frac{1}{x^2})$$

$$=x^2+\frac{1}{x^2}+2(x)(\frac{1}{x})-x^2-\frac{1}{x^2}=2$$

$$\Rightarrow g(x)=2\ ,\ x\in(0,+\infty)$$

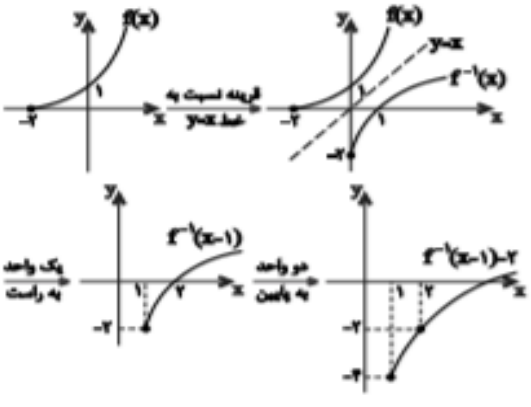
پس تابع g یک تابع ثابت است.

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵، ۲۲ و ۲۳)

---

۸۵ – گزینهٔ «۴» (گاس آی ریاضیات تجربی)

نمودار تابع $y=-2+f^{-1}(x-1)$ را به صورت زیر رسم می‌کنیم:



بنابراین نمودار از ناحیه‌ی دوم و سوم عبور نمی‌کند.

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۱۱ تا ۱۵، ۲۹)

---

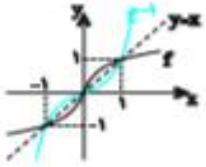
۸۶ – گزینهٔ «۲» (گاس آی ریاضیات تجربی)

عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد.

$$\frac{f(x)-f^{-1}(x)}{x^2-1}\geq 0$$

جدول تعیین علامت را تشکیل می‌دهیم. لذا ریشه‌های مخرج را می‌یابیم:

$$x^2-1=0\Rightarrow x=\pm 1$$



با توجه به نمودار f و f^{-1} در شکل مقابل، در فاصله‌ی $0 \le x \le 1$ و $x \le -1$، f بزرگتر از f^{-1} یا مساوی آن است، یعنی $f(x) \ge f^{-1}(x)$. در نتیجه:

$$f(x) - f^{-1}(x) \ge 0$$

و در فاصله‌های $x \ge 1$ و $-1 \le x \le 0$، f کوچکتر یا مساوی f^{-1} است، یعنی $f(x) \le f^{-1}(x)$. در نتیجه $f(x) - f^{-1}(x) \le 0$ است، پس جدول تعیین علامت به صورت زیر است:

x		-1		0		1	
$f(x) - f^{-1}(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$x^2 - 1$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
عبارت	$+$	ت ن	$+$	0	$-$	ت ن	$-$

با توجه به جدول، دامنه‌ی تابع برابر است با:

$$(-\infty, 0] - \{-1\}$$

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ی ۳۴ تا ۳۹)

---

۸۷ ــ گزینهٔ «۱» (کلاس تی (ریاضیات تجربی))

توجه:

$$\begin{cases} D_{fof^{-1}} = \{x \in D_{f^{-1}} \mid \overbrace{f^{-1}(x) \in D_f}^{\text{همواره برقرار}}\} = D_{f^{-1}} \\ D_{f^{-1}of} = \{x \in D_f \mid \overbrace{f(x) \in D_{f^{-1}}}^{\text{همواره برقرار}}\} = D_f \end{cases}$$

با توجه به نمودار داریم:

$$D_f = [2, 8] \text{ و } D_{f^{-1}} = R_f = [-3, 6]$$

$$D_g = D_{fof^{-1}} \cap D_{f^{-1}of} - \{x \mid f^{-1}of(x) = 0\}$$

$$f^{-1}of(x) = 0 \Rightarrow x = 0$$

اما با توجه به این که $0 \notin D_f$ بنابراین هیچ مقداری از x تابع $f^{-1}of$ را صفر نمی‌کند.

$$D_g = D_{f^{-1}} \cap D_f - \{\} = [-3, 6] \cap [2, 8] = [2, 6]$$

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ی ۱۵ تا ۲۲ و ۳۴ تا ۳۹)

---

۸۸ ــ گزینهٔ «۳» (کلاس تی (ریاضیات تجربی))

از دو طرف تساوی fog می‌گیریم: (ترکیب هر تابع با وارونش، تابع همانی را می‌دهد)

$$(fog)^{-1}(2x - 4) = \frac{x}{2} \xrightarrow{fog} (2x - 4) = (fog)(\frac{x}{2})$$

$$\Rightarrow f(g(\frac{x}{2})) = 2x - 4$$

نمودار وارون f، یعنی f^{-1} محور yها را به ازای $x = 0$ قطع می‌کند، یعنی $f^{-1}(0) = a$، پس $(0, a) \in f^{-1}$، در نتیجه $(a, 0) \in f$، بنابراین $f(a) = 0$.

پس خواهیم داشت:

$$\Rightarrow f(g(\frac{x}{2})) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$$

$$\Rightarrow f(g(1)) = 0 \xrightarrow{g(x) = 2x^2 + 1} f(2 + 1) = 0$$

$$\Rightarrow f(3) = 0 \xrightarrow{f(a) = 0} a = 3$$

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ی ۱۵ تا ۲۲ و ۳۴ تا ۳۹)

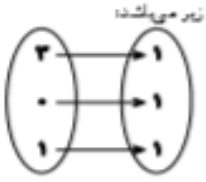
۸۹ گزینهٔ «۲» (منصور سادات پیشوایی)

می‌دانیم تابع همانی دارای ضابطهٔ $f(x)=x$ است، پس:

$$f(x)=ax^2+(b-2)x^2+(3+c)x=x$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ b-2=0\Rightarrow b=2\\ 3+c=1\Rightarrow c=-2\end{cases}$$

پس تابع موردنظر به‌صورت زیر می‌باشد:



که یک تابع ثابت است.

(تابع) (ریاضی ۱، صفحهٔ ۱۰)

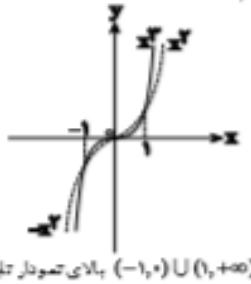
---

۹۰ گزینهٔ «۲» (سهیل سادات)

می‌دانیم تابع $x|x|$ به‌فرم زیر به شکل دو ضابطه‌ای نوشته می‌شود.

$$g(x)=x|x|=\begin{cases}x^2 & ,\ x\ge 0\\ -x^2 & ,\ x<0\end{cases}$$

حال با رسم دو تابع داریم:



نمودار تابع f در بازهٔ $(-1,0)\cup(1,+\infty)$ بالای نمودار تابع g قرار می‌گیرد.

(ترکیبی) (ریاضی ۱، صفحه‌های ۱۰۸ تا ۱۱۳) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳ تا ۵)

۹۱- گزینهٔ «۴» (عباس اشرفی)

ضابطهٔ تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم.

$$f(x)=(k^2-4)((-x^3+3x^2-3x+1)+k-1)$$

$$=(k^2-4)(-(x^3-3x^2+3x-1)+k-1)$$

$$\Rightarrow f(x)=(k^2-4)(-(x-1)^3+k-1)$$

تابع $y=-(x-1)^3+k-1$ اکیداً نزولی است و اگر $k^2-4\le 0$ باشد تابع $f(x)$ صعودی است.

$$k^2-4\le 0\Rightarrow k^2\le 4\Rightarrow -2\le k\le 2\Rightarrow k=\{-2,-1,0,1,2\}$$

به‌ازای پنج مقدار صحیح تابع $f(x)$ می‌تواند تابعی صعودی باشد.

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶ تا ۱۰)

---

۹۲ گزینهٔ «۳» (سهیل سادات)

از روی شکل معلوم است که ضابطه تابع به‌فرم $f(x)=-(x+2)^3+8$ می‌باشد. بعد از ساده‌سازی داریم:

$$-(x^3+6x^2+12x+8)+8=-x^3-6x^2-12x$$

حال با فاکتورگیری از $-x$ عبارت را به‌فرم صورت سوال درمی‌آوریم:

$$-x(x^2+6x+12)=(0-x)(x^2+6x+12)$$

و از مساوی قرار دادن عبارت اخیر و ضابطهٔ سوال:

$$k=0,m=6,n=12\Rightarrow\frac{k+n}{m}=\frac{0+12}{6}=2$$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۳ تا ۵)

---

۹۳ گزینهٔ «۲» (مهران صمدی)

(۱ تا ۳) $1\le\sqrt{1},\sqrt{2},\sqrt{3}<2\Rightarrow[\sqrt{1}]=[\sqrt{2}]=[\sqrt{3}]=1$

(۲ تا ۵) $2\le\sqrt{4},\sqrt{5},\sqrt{6},\sqrt{7},\sqrt{8}<3\Rightarrow[\sqrt{4}]=[\sqrt{5}]=\dots=[\sqrt{8}]=2$

(۹ تا ۱۵) $3\le\sqrt{9},\sqrt{10},\dots,\sqrt{15}<4\Rightarrow[\sqrt{9}]=[\sqrt{10}]=\dots=[\sqrt{15}]=3$

(۱۶ تا ۲۴) $4\le\sqrt{16},\sqrt{17},\sqrt{18},\dots,\sqrt{24}<5\Rightarrow[\sqrt{16}]=[\sqrt{17}]=\dots=[\sqrt{24}]=4$

(۲۵ تا ۳۵) $5\le\sqrt{25},\sqrt{26},\dots,\sqrt{35}<6\Rightarrow[\sqrt{25}]=[\sqrt{26}]=\dots=[\sqrt{35}]=5$

.
.
.

(۶۵ تا ۸۰) $8\le\sqrt{64},\sqrt{65},\dots,\sqrt{80}<9\Rightarrow[\sqrt{64}]=[\sqrt{65}]=\dots=[\sqrt{80}]=8$

حاصل عبارت موردنظر $=3(1)+5(2)+7(3)+9(4)+11(5)+13(6)+15(7)+17(8)=444$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۲ تا ۵۶)

---

۹۴ گزینهٔ «۳» (احسان غلی‌زاده)

با توجه به دامنهٔ تابع f داریم:

$$D_f=[-2,+\infty)\Rightarrow ax-b\ge 0$$

$$\xrightarrow{a>0}x\ge\frac{b}{a}\Rightarrow\frac{b}{a}=-2\Rightarrow b=-2a$$

$$3y-2x=9\xrightarrow{x=0}3y=9\Rightarrow y=3\Rightarrow A(0,3)$$

نقطهٔ $A(0,3)$ در ضابطهٔ f صدق می‌کند، پس داریم:

$$f(0)=3\Rightarrow 1+\sqrt{-b}=3\Rightarrow\sqrt{-b}=2\Rightarrow b=-4$$

$$\xrightarrow{b=-2a}-4=-2a\Rightarrow a=2$$

$$\Rightarrow f(x)=1+\sqrt{2x+4}$$

$$\Rightarrow f(a-b)=f(2-(-4))=f(6)=1+\sqrt{2\times 6+4}$$

$$\Rightarrow 1+\sqrt{16}=1+4=5$$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۵۲ و ۵۳)

۹۵- گزینهٔ «۱» (منصور ابراهیم توزنده‌جانی)

تابع $g(x)=-x^2$ تابعی اکیداً نزولی است. بنابراین داریم:

$$g(x^2)-g(3x-2)\ge 0\Rightarrow g(x^2)\ge g(3x-2)\Rightarrow x^2\le 3x-2$$

$$\Rightarrow x^2-3x+2\le 0\Rightarrow(x-1)(x-2)\le 0\Rightarrow 1\le x\le 2$$

$$\Rightarrow b-a=2-1=1$$

(تابع) (ریاضی ۳، صفحه‌های ۶ تا ۱۰)

---

۹۶ گزینهٔ «۱» (منصور سادات پیشوایی)

تابعی که به‌صورت $y=|x-a|-|x-b|$ باشد، شکلی شبیه به سرسره دارد که دو حالت در رسم آن وجود دارد:

www.mapedu.ir

پس برای صعودی بودن آن ریشهٔ قدرمطلق دوم باید بزرگتر از ریشهٔ قدرمطلق اول باشد.

$$y=|x-m^2|-|x-(5m+6)|$$

$$a<b\Rightarrow m^2<5m+6\Rightarrow m^2-5m-6<0\Rightarrow (m+1)(m-6)<0$$
$$\Rightarrow -1<m<6\Rightarrow m=0,1,2,\dots,5$$

همچنین اگر ریشه‌های داخل دو قدرمطلق با هم برابر باشند تابع ثابت $y=0$ خواهد بود که این تابع نیز تابعی صعودی است.

$$m^2=5m+6\Rightarrow m^2-5m-6=0$$
$$\Rightarrow (m-6)(m+1)=0\Rightarrow m=-1,6$$

پس درمجموع تابع به‌ازای ۸ مقدار $-1,0,1,\dots,6$ صعودی است.

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ی ۶ تا ۱۰)

---

۹۷ گزینهٔ «۴» (آرمان نصری)

برای آن‌که دامنهٔ تابع قوی به‌صورت دو عضوی شود، تابع $f(x)$ باید به شکل زیر باشد:

$$f(x)=\sqrt{9-x^2}-\sqrt{a(x^2-9)}$$

چرا که در این صورت:

$$\begin{cases}9-x^2\ge 0\Rightarrow -3\le x\le 3\\ a(x^2-9)\ge 0\xrightarrow{a>0} x^2-9\ge 0\Rightarrow x\ge 3 \text{ یا } x\le -3\end{cases}\xrightarrow{\text{اشتراک}}\{\pm 3\}$$

پس عبارت زیر رادیکال دوم یعنی ax^2+bx+c به‌صورت $a(x^2-9)$ بوده و داریم:

$$ax^2+bx+c=ax^2-9a\Rightarrow\begin{cases}b=0\\ c=-9a\end{cases}$$

بنابراین:

$$\frac{a+2b+3c}{b-c}=\frac{a+2(0)+3(-9a)}{0-(-9a)}=\frac{-26a}{9a}=\frac{-26}{9}$$

(ترکیبی) (ریاضی ۱، مقدمه‌ی ۱۰ تا ۱۰) (ریاضی ۳، مقدمه‌ی ۵۰، ۵۳ و ۶۵ تا ۷۰)

---

۹۸ – گزینهٔ «۳» (علی‌اصغر شریفی)

ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=4^{x-\sqrt{x-1}}$$

محدودهٔ توان عدد ۴ به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$x-\sqrt{x-1}=(\sqrt{x-1}-\tfrac{1}{2})^2+\tfrac{3}{4}\ge\tfrac{3}{4}$$

پس برد تابع f به‌صورت زیر است:

$$R_f=[4^{\frac{3}{4}},+\infty)=[2\sqrt[4]{2},+\infty)$$

پس کوچک‌ترین عدد طبیعی داخل برد ۳ است.

(ترکیبی) (ریاضی ۱، مقدمه‌ی ۱۰ تا ۱۰) (ریاضی ۳، مقدمه‌ی ۵۰ و ۵۳)

---

۹۹ – گزینهٔ «۲» (وحید رادی)

$$\left.\begin{array}{l}f(2)+\cancel{g(2)}=3\\ f(2)-\cancel{g(2)}=7\end{array}\right\}\Rightarrow 2f(2)=10\Rightarrow\begin{cases}f(2)=5\\ g(2)=-2\end{cases}$$

$$\Rightarrow f^2(2)-3g(2)=25-3(-2)=31$$

(تابع) (ریاضی ۲، مقدمه‌ی ۶۵ تا ۷۰)

---

۱۰۰ – گزینهٔ «۱» (بابک سادات)

دامنه و برد تابع f برابر $\mathbb{R}$ است. با توجه به این موضوع که برد f محدودیتی برای gof ایجاد نمی‌کند، بیشترین مقدار g همان بیشترین مقدار $gof(x)=-2x^2+1$ است، یعنی $y=1$ است. از طرفی تغییرات $g(2x+7)$ صرفاً در مورد دامنه بوده، محدودیت برای دامنه ایجاد نمی‌کند و روی بیشترین مقدار (عرض) تأثیری ندارد.

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ی ۱ تا ۱۶ و ۲۲ و ۲۳)

---

۱۰۱ – گزینهٔ «۳» (محمدرضا پیشوایی)

با توجه به این‌که $|x|=\begin{cases}x & x\ge 0\\ -x & x<0\end{cases}$ و همچنین نمودار f که در اعداد نامنفی تعریف شده است، خواهیم داشت:

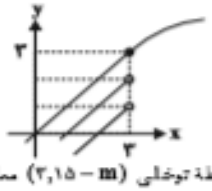
$$y=2f(x-|x|)\xrightarrow{x\ge 0}y=2f(x-x)$$
$$\Rightarrow y=2f(0)\Rightarrow y=2(1)\Rightarrow y=2$$

(تابع) (ریاضی ۱، مقدمه‌ی ۱۳ تا ۱۷)

(ریاضی ۲، مقدمه‌ی ۶۵ تا ۷۰)

---

۱۰۲ – گزینهٔ «۲» (وحید رادی)



در رسم تابع f، جایگاه نقطهٔ توخالی $(3,15-m)$ معلوم نیست. برای آن که تابع صعودی شود (طبق نمودار)، کافی است شرط زیر برقرار باشد:

$$15-m\le f(3)=3\Rightarrow \boxed{m\ge 12}$$

پس در محدودهٔ m، ۱۱ عدد طبیعی قرار ندارد.

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ی ۶ تا ۱۰)

---

۱۰۳ – گزینهٔ «۲» (احسان نخ‌زاده)

دقت کنید که اعمال جبری روی تابع، تأثیری در دامنه ندارند.

ابتدا دامنهٔ هر یک از توابع $2g(-x)$ و $g(1-x)+2$ را می‌یابیم:

$$D_g=[-2,0]\Rightarrow -2\le -x\le 0\Rightarrow 0\le x\le 2$$
$$\Rightarrow D_1=[0,2]\quad(1)$$
$$D_g=[-2,0]\Rightarrow -2\le 1-x\le 0\Rightarrow 1\le x\le 3$$
$$\Rightarrow D_2=[1,3]\quad(2)$$

حال برای یافتن دامنهٔ f باید از هر یک از دامنه‌های (۱) و (۲) اشتراک بگیریم:

$$\left.\begin{array}{l}y=g(1-x)+2\xrightarrow{(2)}D_2=[1,3]\\ y=2g(-x)\xrightarrow{(1)}D_1=[0,2]\end{array}\right\}\xrightarrow{\cap}[1,2]$$

چون به ازای $x=0$ و $x=2$ مخرج تابع f صفر می‌شود، پس این اعداد جزو دامنه نیستند:

$$D_f=[1,2)$$

بنابراین دامنهٔ f فقط شامل عدد صحیح $x=1$ است.

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۴۵ تا ۶۰)

(ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۱۵ تا ۲۳)

---

۱۰۴ – گزینهٔ «۲» (عباس اشرفی)

نقطهٔ (a,b) روی نمودار $y=1-f(1-x)$ قرار دارد، پس نقطهٔ $(1-a,1-b)$ روی نمودار خود تابع $y=f(x)$ قرار دارد.

همین‌طور اگر نقطهٔ $(1-a,1-b)$ روی نمودار $y=f(x)$ باشد، نقطهٔ $(\frac{2-a}{2},3-2b)$ روی نمودار تابع $y=2f(2x-1)+1$ قرار دارد.

از آن‌جایی که نمودار تابع $y=2f(2x-1)+1$ از مبدأ می‌گذرد، داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{2-a}{2}=0\Rightarrow a=2\\ 3-2b=0\Rightarrow b=\frac{3}{2}\end{array}\right\}\Rightarrow a+b=\frac{7}{2}$$

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۱۵ تا ۲۳)

---

۱۰۵ – گزینهٔ «۳» (اسرو‌ش موتمنی)

با فرض $f(x)=ax+b$ داریم:

$$fof(x)=a(ax+b)+b=a^2x+ab+b$$

$$y=a^2x+ab+b\xrightarrow[\text{ضریب ۲}]{\text{انبساط با}}y=a^2\left(\frac{x}{2}\right)+ab+b$$

$$\xrightarrow{\text{۵ واحد به پایین}}y=\frac{a^2}{2}x+ab+b-5=x$$

$$\Rightarrow\begin{cases}ab+b-5=0\\ \frac{a^2}{2}=1\end{cases}$$

حال چون f نزولی است، داریم:

$$\begin{cases}a=-2\\ -b-5=0\Rightarrow b=-5\end{cases}$$

$$\Rightarrow f(1)=a(1)+b=-2+(-5)=-7$$

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۱۱ تا ۲۳)

---

۱۰۶ – گزینهٔ «۴» (مسعود پیتوایی)

طبق تعریف دامنهٔ $gof(x)$ داریم:

$$D_{gof}=\{x\in D_f\mid f(x)\in D_g\}$$

با توجه به دامنهٔ f و خروجی آن، داریم:

$\{[0,1]\in D_f\mid[1,2]\in D_g\}\rightarrow$ ق

$\{(1,2]\in D_f\mid[0,1)\notin D_g\}\rightarrow$ غ ق

$\{(2,3)\in D_f\mid(0,1)\notin D_g\}\rightarrow$ غ ق

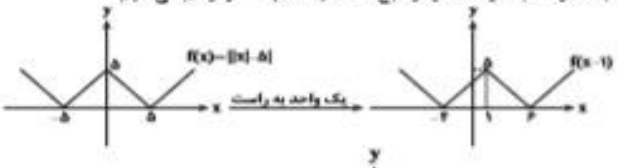
$\{[2,3]\in D_f\mid[1,2]\in D_g\}\rightarrow$ ق

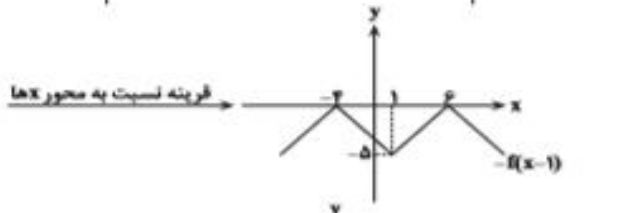
بنابراین دامنهٔ تابع gof برابر $[0,1]\cup[2,3]$ است.

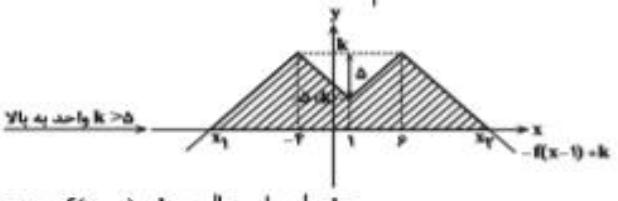
(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۱۱ تا ۲۶، ۲۲ و ۲۳)

۱۰۷ – گزینهٔ «۳» (مصطفی کریمی)

ابتدا مرحله به مرحله نمودار تابع $-f(x-1)+k$ را رسم می‌کنیم:







$$y=-f(x-1)+k=-||x-1|-5|+k$$

$$\Rightarrow-||x-1|-5|+k=0\Rightarrow||x-1|-5|=k$$

با توجه به نمودار فوق x_1 کوچک‌تر از -4 و x_2 بزرگ‌تر از 6 است، بنابراین داریم:

$$|x-1|-5=k\Rightarrow|x-1|=5+k\Rightarrow\begin{cases}x_2=6+k\\ x_1=-4-k\end{cases}$$

$$\Rightarrow x_2-x_1=10+2k$$

حال برای به‌دست آوردن مساحت قسمت رنگی، از مساحت ذوزنقه، مساحت مثلث را کم می‌کنیم:

$$S_{\text{رنگی}}=\frac{(2k+10+10)\times k}{2}-\frac{10\times5}{2}=94$$

$$\Rightarrow S_{\text{رنگی}}=(k+10)k-25=94$$

$$\Rightarrow k(k+10)=119=7\times17\Rightarrow k=7$$

(تابع) (ریاضی ۱، مقدمه‌ای ۱۳ تا ۱۷)

(ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۱۵ تا ۲۴)

---

۱۰۸ – گزینهٔ «۱» (علی‌اصغر شریفی)

ابتدا معادلهٔ $f(f(t))=t$ را حل می‌کنیم. اگر t فرد باشد، داریم:

$$f(t+1)=t\xrightarrow{\text{فرد } t+1}\frac{t+1}{2}=t\Rightarrow t=1$$

که چون $t=1$ فرد است، پس مورد قبول می‌باشد. اگر t مضرب ۴ باشد، داریم:

$$f\left(\frac{t}{2}\right)=t\xrightarrow{\text{فرد } \frac{t}{2}}\frac{t}{4}=t\Rightarrow t=0$$

که چون $t=0$ عدد طبیعی نیست، پس مورد قبول نمی‌باشد. اگر t زوج باشد اما مضرب ۴ نباشد، داریم:

$$f\left(\frac{t}{2}\right)=t\xrightarrow{\text{فرد } \frac{t}{2}}\frac{t}{2}+1=t\Rightarrow t=2\rightarrow\text{مورد قبول}$$

پس معادلهٔ $f(f(t))=t$ دو جواب $t=1$ و $t=2$ دارد. حالا سراغ معادلهٔ اصلی می‌رویم:

$$f(f(f(x)))=f(x)\Rightarrow\begin{cases}f(x)=1\Rightarrow x=2\\ f(x)=2\Rightarrow x=1,4\end{cases}$$

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۱۱ تا ۲۶، ۲۲ و ۲۳)

۱۰۹- گزینهٔ «۴» (سهیل ساسانی)

شرط تابع بودن: $(۴,n-۳)=(۴,-۱) \Rightarrow n-۳=-۱ \Rightarrow n=۲$

شرط یک‌به‌یک بودن: $(m^۲-m,۳)=(۲,۳)$

$\Rightarrow m^۲-m=۲ \Rightarrow m^۲-m-۲=۰$

$\begin{cases} m=-۱ \text{ ق ق} \\ m=۲ \Rightarrow (۱,۵),(-۲,۵) \Rightarrow \text{غ ق ق} \end{cases}$ (غیر یک به یک)

$\Rightarrow n=۲, m=-۱ \Rightarrow (m,n)=(-۱,۲)$

(ریاضی ۱، مقدمه‌ای ۹۵ تا ۱۰۰) (ریاضی ۲، مقدمه‌ای ۵۷ تا ۶۴) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۲۶ تا ۲۷) (تکمیلی)

۱۱۰- گزینهٔ «۳» (حسن اسماعیلی)

می‌دانیم $D_{f^{-1}of(x)}=D_{f(x)}$ و $D_{fof^{-1}(x)}=D_{f^{-1}(x)}=R_{f(x)}$ پس دامنهٔ تابع گفته شده برابر اشتراک D_f و R_f است.

دامنهٔ $f(x)$: زیر رادیکال باید نامنفی باشد. $x \geq ۰ \to D_f=[۰,+\infty]$

برد $f(x)$: با توجه به اینکه $y=x$ و $y=\sqrt{x}$ هر دو صعودی اکید هستند پس تابع $f(x)$ نیز که مجموع آن‌ها است یک تابع صعودی اکید است و حداقل و حداکثر آن در ابتدا و انتهای دامنه رخ می‌دهد.

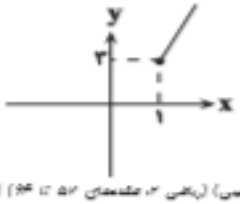
$x=۰: f(۰)=۰+۰+۱=۱ \Rightarrow R_f=[۱,+\infty)$

در نتیجه:

$D_y=D_f \cap R_f=[۱,+\infty)$

$y=۲fof^{-1}(x)+f^{-1}of(x)=۲(x)+x=۳x$

نمودار تابع به‌صورت زیر است:



(تکمیلی) (ریاضی ۲، مقدمه‌ای ۵۷ تا ۶۴) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۲۶ تا ۲۹)

۱۱۱- گزینهٔ «۳» (سهیل حسن‌نژادپور)

$f^{-1}(۲)=\alpha \Rightarrow f(\alpha)=۲ \Rightarrow \sqrt{\alpha+\sqrt{۲\alpha-۱}+۵}=۲$

$\xrightarrow{\text{به توان دو}} \alpha+\sqrt{۲\alpha-۱}+۵=۹ \Rightarrow \sqrt{۲\alpha-۱}=۴-\alpha$

بایستی زیر رادیکال و مقابل رادیکال نامنفی باشد، پس $\frac{۱}{۲} \leq \alpha \leq ۴$ خواهد بود.

$\xrightarrow{\text{به توان ۲}} ۲\alpha-۱=۱۶+\alpha^۲-۸\alpha \Rightarrow \alpha^۲-۱۰\alpha+۱۷=۰$

$\Rightarrow \alpha=\frac{۱۰\pm\sqrt{۱۰۰-۴\times ۱۷}}{۲}$

$\Rightarrow \alpha=۵\pm\sqrt{۸} \xrightarrow{\frac{۱}{۲}\leq\alpha\leq ۴} \alpha=۵-\sqrt{۸}=۵-۲\sqrt{۲}$

(تکمیلی) (ریاضی ۲، مقدمه‌ای ۵۷ تا ۶۴) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۲۶ تا ۲۹)

۱۱۲- گزینهٔ «۱» (سروش موئینی)

یک‌به‌یک نیست $\frac{۳x-۱}{۲x+b} \Rightarrow \frac{۳}{۲}=\frac{-۱}{b} \Rightarrow b=\frac{-۲}{۳}$

$y=۲x-\frac{۲}{۳} \xrightarrow{\text{تلاقی با وارون}} ۲x-\frac{۲}{۳}=x \Rightarrow x=\frac{۲}{۳}=y$

توجه: خط d (غیر موازی با $y=x$) نمودار وارون خود را روی خط $y=x$ می‌کند.

(تکمیلی) (ریاضی ۲، مقدمه‌ای ۵۷ تا ۶۴) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۲۶ تا ۲۹)

۱۱۳- گزینهٔ «۱» (عباس اشرفی)

ضابطهٔ تابع $f(x)$ را به‌صورت مربع کامل می‌نویسیم.

$f(x)=x^۲-۳x+۱=(x-\frac{۳}{۲})^۲-\frac{۵}{۴}$

$\Rightarrow y=(x-\frac{۳}{۲})^۲-\frac{۵}{۴}$

x را برحسب y می‌نویسیم:

$y+\frac{۵}{۴}=(x-\frac{۳}{۲})^۲ \Rightarrow \sqrt{y+\frac{۵}{۴}}=|x-\frac{۳}{۲}| \xrightarrow{x\leq\frac{۳}{۲}}$

$\sqrt{y+\frac{۵}{۴}}=-x+\frac{۳}{۲} \Rightarrow x=-\sqrt{y+\frac{۵}{۴}}+\frac{۳}{۲}$

جای x و y را عوض می‌کنیم:

$y=-\sqrt{x+\frac{۵}{۴}}+\frac{۳}{۲} \Rightarrow f^{-1}(x)=-\sqrt{x+\frac{۵}{۴}}+\frac{۳}{۲} \Rightarrow$

$a=-۱, b=\frac{۵}{۴}, c=\frac{۳}{۲} \Rightarrow ۲a+b-c=۲(-۱)+\frac{۵}{۴}-\frac{۳}{۲}=-\frac{۹}{۴}$

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای)

۱۱۴- گزینهٔ «۳» (امیرهوشنگ انصاری)

$f^{-1}(x)+f(۲)=۳x+۷ \xrightarrow{x=f(۲)} \underbrace{f^{-1}(f(۲))}_{۲}+f(۲)=۳f(۲)+۷$

$\Rightarrow ۲f(۲)=-۴ \Rightarrow f(۲)=-۲ \Rightarrow f^{-1}(x)-۲=۳x+۷$

$\Rightarrow f^{-1}(x)=۳x+۹$

$f(x)=\frac{x-۹}{۳}=\frac{۱}{۳}x-۳$

$fof(x)=f^{-1}of^{-1}(x) \Rightarrow \frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۳}x-۳)-۳=۳(۳x+۹)+۹$

$\Rightarrow \frac{۱}{۹}x-۴=۹x+۳۶ \Rightarrow \frac{۸۰}{۹}x=-۴۰ \Rightarrow x=-۴/۵$

(تکمیلی) (ریاضی ۲، مقدمه‌ای ۵۷ تا ۶۴) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۲۶ تا ۲۹)

۱۱۵- گزینهٔ «۱» (مصطفی پیشوایی)

کافی است در دو طرف تساوی زیر تابع f را اعمال کنیم.

$f^{-1}(۲x+۵)=g(x+۲) \xrightarrow{f} ۲x+۵=f(g(x+۲))$

حال کافی است برای یافتن $fog(۲)$ مقدار $x=۱$ را قرار دهیم.

$x=۱ \Rightarrow fog(۲)=۲(۱)+۵=۷$

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۲۶ تا ۲۹)

۱۱۶- گزینهٔ «۴» (مصطفی کرمی)

در گام اول تابع f^{-1} را ساده می‌کنیم.

$f^{-1}(x)=\frac{(x+۱)(x+۴)}{x+۱} \Rightarrow f^{-1}(x)=x+۴, x\neq -۱$

پس $f^{-1}(x)\neq ۳$ است. حالا f^{-1} را وارون می‌کنیم تا به f برسیم:

$$f(x)=(f^{-1})^{-1}=x-4$$

ولی $x=3$ در دامنه f نیست، پس باید داشته باشیم:

$$f(x)=\frac{(x-4)(x-3)}{x-3}=\frac{x^2-7x+12}{x-3}$$

و در نتیجه:

$$\Rightarrow\begin{cases}a=-7\\b=12\\c=-3\end{cases}\Rightarrow abc=252$$

(ترکیبی) (ریاضی ۲، مقدمه‌ای ۵۷ تا ۶۴) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۲۸ تا ۳۹)

۱۱۷- گزینهٔ «۱» (ارسال ابراهیمی)

باید وارون تابع را به‌دست آوریم. برای $x\geq 0$ داریم:

$$x\geq 0: y=\frac{x}{1+x}\Rightarrow y+yx=x\Rightarrow x=\frac{y}{1-y}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{1-x}$$

دقت کنید که برد عبارت $y=\frac{x}{1+x}$ در بازه $x\geq 0$، بازه $[0,1)$ خواهد بود بنابراین دامنه تابع f^{-1} در این حالت عبارت برابر با $D_{f^{-1}}=[0,1)$ است.

حال برای $x<0$ داریم:

$$x<0: y=\frac{x}{1-x}\Rightarrow x=\frac{y}{1+y}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{1+x}$$

برد عبارت $y=\frac{x}{1-x}$ در بازهٔ $x<0$، بازه $(-1,0)$ است، بنابراین دامنهٔ f^{-1} در این حالت برابر با $D_{f^{-1}}=(-1,0)$ خواهد بود، حال داریم:

$$f^{-1}(x)=\begin{cases}\frac{x}{1-x}, & 0\leq x<1\\ \frac{x}{1+x}, & -1<x<0\end{cases}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{1-|x|};|x|<1$$

$$\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=1\\c=-1\end{cases}\Rightarrow a+b+c=1$$

(ترکیبی) (ریاضی ۲، مقدمه‌ای ۵۷ تا ۶۴) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۲۸ تا ۳۹)

۱۱۸- گزینهٔ «۴» (سراسری تجربی- ۹۸)

راه حل اول: با توجه به معادله‌ی خط $y=\frac{x-9}{2}$، نقطه‌ی تلاقی این خط با نمودار تابع f^{-1} را می‌توان به صورت $(\alpha,\frac{\alpha-9}{2})$ در نظر گرفت، بنابراین:

$$(\alpha,\frac{\alpha-9}{2})\in f^{-1}\Rightarrow(\frac{\alpha-9}{2},\alpha)\in f\Rightarrow f(\frac{\alpha-9}{2})=\alpha$$

با توجه به اینکه $x\geq 1$ ، $f(x)=x^2-2x-3$، داریم:

$$(\frac{\alpha-9}{2})^2-2(\frac{\alpha-9}{2})-3=\alpha$$

$$\xrightarrow{\times 4}(\alpha-9)^2-4(\alpha-9)-12=4\alpha$$

$$\Rightarrow\alpha^2-18\alpha+81-4\alpha+36-12-4\alpha=0$$

$$\Rightarrow\alpha^2-26\alpha+105=0\Rightarrow(\alpha-5)(\alpha-21)=0$$

$$\Rightarrow\alpha=5\ ,\ \alpha=21$$

به ازای $\alpha=5$ داریم: $\frac{\alpha-9}{2}=-\frac{1}{2}$ که این مقدار در دامنه‌ی تابع f قرار ندارد، پس فقط $\alpha=21$ قابل قبول است.

راه حل دوم: ابتدا ضابطه‌ی تابع f^{-1} را می‌یابیم، x را برحسب y یافته و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$f: y=x^2-2x-3\Rightarrow y=(x-1)^2-4$$

$$\Rightarrow y+4=(x-1)^2\Rightarrow\sqrt{y+4}=|x-1|$$

$$\xrightarrow{x\geq 1}\sqrt{y+4}=x-1\Rightarrow x=\sqrt{y+4}+1$$

$$\xrightarrow{\text{عوض جای x و y}}f^{-1}(x)=1+\sqrt{x+4}$$

برای یافتن نقاط تلاقی دو نمودار f^{-1} و g، معادله‌ی $f^{-1}(x)=g(x)$ را حل می‌کنیم:

$$f^{-1}(x)=g(x)\Rightarrow 1+\sqrt{x+4}=\frac{x-9}{2}$$

$$\Rightarrow\sqrt{x+4}=\frac{x-11}{2}\quad(*)$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{x+4}=x-11\xrightarrow{\text{به توان ۲}}4(x+4)=x^2-22x+121$$

$$\Rightarrow x^2-26x+105=0\Rightarrow(x-21)(x-5)=0$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=5 & \text{غ ق ق}\\ x=21\end{cases}$$

جواب $x=5$ در معادله‌ی اصلی صدق نمی‌کند، پس قابل قبول نیست.

توجه: با جایگذاری اعداد گزینه‌ها در معادله‌ی (*) می‌توان سریعتر به جواب رسید و مراحل بعد از آن را انجام نداد.

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۲۸، مکمل مثال)

۱۱۹- گزینهٔ «۳» (سمیر یاغی)

چون مقدار تابع f در $x=7$ خواسته شده لذا داریم:

$$f(7)=a(7)^7+b(7)^3+c(7)-5\quad(I)$$

از طرفی چون $f(-7)$ را داریم لذا:

$$f(-7)=a(-7)^7+b(-7)^3+c(-7)-5$$

$$\Rightarrow f(-7)=-a(7)^7-b(7)^3-c(7)-5\quad(II)$$

دو طرف رابطه‌ی (I) و (II) را جمع می‌کنیم:

$$f(7)+\underbrace{f(-7)}_{6}=-10\Rightarrow f(7)=-16$$

(تابع) (ریاضی ۱، مقدمه‌ای ۱۰۹ تا ۱۱۷)

۱۲۰- گزینهٔ «۴» (بهمن رایض)

با دامنه و برد داده شده، دو حالت برای تابع f موجود است:

حالت ۱: نمودار تابع f خطی صعودی گذرنده از نقاط $(5,5)$ و $(-2,-9)$ باشد:

$$a=\frac{5-(-9)}{5-(-2)}=\frac{14}{7}=2\Rightarrow f(x)=2x+b\Rightarrow 5=2(5)+b\Rightarrow b=-5$$

$$\Rightarrow f(x)=2x-5\Rightarrow f(2)=-1$$

حالت ۲: نمودار تابع f خطی نزولی گذرنده از نقاط $(5,-9)$ و $(-2,5)$ باشد:

$$a=\frac{-9-5}{5-(-2)}=\frac{-14}{7}=-2\Rightarrow f(x)=-2x+b$$

$$\Rightarrow 5=-2(-2)+b\Rightarrow b=1$$

$$\Rightarrow f(x)=-2x+1\Rightarrow f(2)=-3$$

$$\text{مجموع مقادیر } f(2)=-1-3=-4$$

(تابع) (ریاضی ۱، مقدمه‌ای ۱۰۱ تا ۱۱۷)

www.mapedu.ir

۱۲۱- گزینهٔ «۲» (علیرضا خانپور)

$$D_f: 4-x^2 \geq 0 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2$$
$$D_g: \{-3,-2,0,2,5\}$$
$$\Rightarrow D_f \cap D_g = \{-2,0\}$$

$$f+g = \{(-2,0+2)(0,2+7)\} = \{(-2,2)(0,9)\}$$

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۴۵ تا ۶۰)

۱۲۲- گزینهٔ «۳» (علیرضا خانپور)

$$\xrightarrow{\sqrt{x}=t} y = \frac{1}{t} - t \Rightarrow ty = 1 - t^2 \Rightarrow t^2 + ty - 1 = 0$$

$$\Delta = y^2 + 4 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = \dfrac{-y+\sqrt{y^2+4}}{2} = \sqrt{x} \Rightarrow x = \left(\dfrac{-y+\sqrt{y^2+4}}{2}\right)^2 \\ t_2 = \underbrace{\dfrac{-y-\sqrt{y^2+4}}{2}}_{\text{همواره منفی}} = \sqrt{x} \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

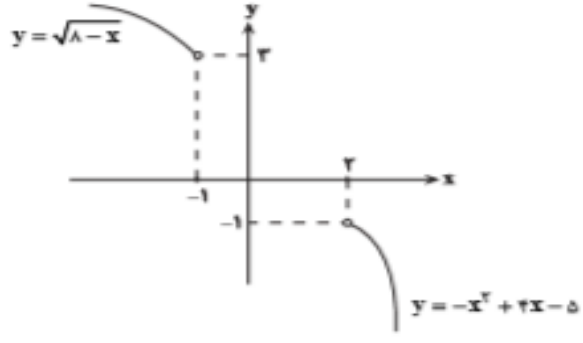
$$f^{-1}(x) = \left(\frac{\sqrt{x^2+4}-x}{2}\right)^2 \Rightarrow \begin{cases} b = 4 \\ n = 2 \\ m = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

$$ab - mn = 8 - 2 = 6$$

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۵۷ تا ۶۴)

۱۲۳- گزینهٔ «۱» (بیوانس نیکنام)

با توجه به نمودارهای $y=\sqrt{8-x}$ و $y=-x^2+4x-5$ در بازه‌های داده شده باید تابع f اکیداً نزولی باشد پس تابع خطی $y=mx+2m+1$ اکیداً نزولی است یعنی $m<0$ از طرفی:



$$\begin{cases} f(-1) \leq 3 \Rightarrow m+1 \leq 3 \Rightarrow m \leq 2 \\ -1 \leq f(2) \Rightarrow -1 \leq 4m+1 \Rightarrow \dfrac{-1}{2} \leq m \end{cases}$$

پس $\frac{-1}{2} \leq m < 0$ و بیشترین مقدار $b-a$ برابر است با $\frac{1}{2}$.

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۶ تا ۱۰)

۱۲۴- گزینهٔ «۲» (اسدالله زمانی)

f و f^{-1} هم‌پخش هستند پس هر دو اکیداً صعودی و با توجه به اینکه $f^{-1}(0)=3$ داریم: $f(3)=0$.

$$f(1-2x) \Rightarrow 1-2x = 3 \Rightarrow x = -1$$

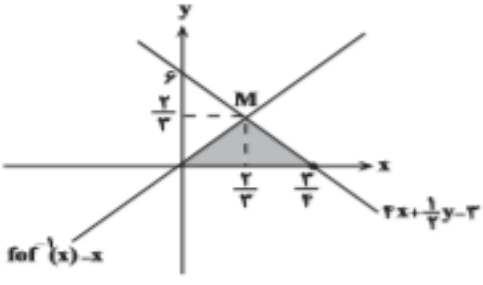
x		−۱		۰		۳	
x^2	+		+		+		+
$f(1-2x)$	+		−		−		−
$x-3$	−		−		−		+
	−		+		+	ت‌ن	−

$$\frac{x^2 f(1-2x)}{x-3} \geq 0 \Rightarrow [-1,3) \xrightarrow{z} -1,0,1,2$$

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۶ تا ۱۰ و ۱۵ تا ۲۹)

۱۲۵- گزینهٔ «۴» (رویا نظرنژاد)

شیب خط $4y+2y-5=0$ برابر ۱- است، پس شیب تابع خطی $f(x)$ برابر ۱- و ضابطهٔ آن به‌صورت $f(x)=-x+k$ می‌باشد. می‌دانیم اگر در تابع خطی شیب ۱- باشد، نمودار تابع بر وارون خود منطبق است، یعنی $f(x)=f^{-1}(x)$ و در نتیجه $fof(x)$ همان $fof^{-1}(x)$ خواهد بود. می‌دانیم ترکیب هر تابع با وارون خود همانی است. یعنی مساحت محدود بین $fof^{-1}(x)=x$، خط $4x-2y=3$ و محور xها مطلوب است.



$$\begin{cases} 4x + \frac{1}{2}y = 3 \\ y = x \end{cases} \Rightarrow x = \frac{2}{3} \Rightarrow M\left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$$

$$\Rightarrow S_{\text{مطلوب}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۱ تا ۲۹)

۱۲۶- گزینهٔ «۱» (بهرام دلاج)

ضابطهٔ تابع g را به‌دست می‌آوریم:

$$g(x)=\begin{cases}-x+4 & , \ 1\le x\le 5\\ \frac{4}{5}x+\frac{11}{5} & , \ -4\le x<1\end{cases}$$

در نتیجه نقاط تلاقی نمودار g با محور xها برابر است با:

$$-x+4=0\Rightarrow x=4 \qquad , \qquad \frac{4}{5}x+\frac{11}{5}=0\Rightarrow x=\frac{-11}{4}$$

حال داریم:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

$$=\{-4\le x\le 5 \mid g(x)>0\}=(-\frac{11}{4},4)\xrightarrow{\text{اعداد صحیح}}$$

$$-2,-1,\dots,3\Rightarrow \text{۶ عدد}$$

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۱ تا ۱۴ و ۲۲ و ۲۳)

۱۲۷- گزینهٔ «۲» (ایمان مرادی)

با توجه به شکل عددهای موجود در بازهٔ $[-3,5]$ را می‌توان در تابع داده شده به‌جای x قرار داد:

$$-3\le x\le 5\xrightarrow{\times 3}-9\le 3x\le 15\xrightarrow{+6}-3\le 3x+6\le 21$$

این یعنی عددهای موجود در بازهٔ $[-3,21]$ را می‌توان در خود تابع f قرار داد و بنابراین: $D_f=[-3,21]\to D_{2f(\frac{x}{2})+1}:-3\le\frac{x}{2}\le 21\Rightarrow -6\le x\le 42$

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۱۵ تا ۲۳)

۱۲۸- گزینهٔ «۲» (پویان ظهیرالدین)

حال داریم:

$$f(x)=\frac{2-x}{3x+5}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{-5x+2}{3x+1}$$

$$f^{-1}(-3f^{-1}(k))=-1\Rightarrow -3f^{-1}(k)=f(-1)\xrightarrow{f(-1)=\frac{3}{2}}$$

$$-3f^{-1}(k)=\frac{3}{2}\Rightarrow f^{-1}(k)=-\frac{3}{4}\Rightarrow\frac{-5k+2}{3k+1}=-\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow -9k-3=-20k+8\Rightarrow 11k=11\Rightarrow k=1$$

$$\Rightarrow f(1)=\frac{2-1}{3(1)+5}=\frac{1}{8}$$

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۲۴ تا ۳۹)

۱۲۹- گزینهٔ «۴» (سیدوار نظری)

با توجه به نمودار داده شده، $g^{-1}(-1)=3$ است پس:

$$fog^{-1}(-1)=f(g^{-1}(-1))=f(3)$$

از طرفی $(f-g)(3)=0$ است پس:

$$f(3)-g(3)=0\xrightarrow{g^{-1}(-1)=3\Rightarrow g(3)=-1}$$

$$f(3)-(-1)=0\Rightarrow f(3)=-1$$

حال برای محاسبهٔ $gof^{-1}(5)$ داریم:

$$(f-g)(-2)=1\Rightarrow f(-2)-g(-2)=1\xrightarrow{g^{-1}(4)=-2\Rightarrow g(-2)=4}$$

$$f(-2)-4=1\Rightarrow f(-2)=5$$

$$gof^{-1}(5)=g(f^{-1}(5))=\xrightarrow[g(-2)=4]{f(-2)=5\Rightarrow f^{-1}(5)=-2}g(-2)=4$$

بنابراین حاصل خواسته شده برابر است با:

$$(fog^{-1})(-1)+(gof^{-1})(5)=-1+4=3$$

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۲۴ تا ۳۹)

۱۳۰- گزینهٔ «۴» (بهار رادفلس)

راه حل اول: با توجه به این‌که $f(x)=\frac{x+1}{2}$ است، ابتدا ضابطهٔ معکوس این تابع را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{x+1}{2}\Rightarrow 2y=x+1\Rightarrow x=2y-1\Rightarrow f^{-1}(x)=2x-1$$

از طرفی می‌دانیم $(fog)^{-1}(x)=(g^{-1}of^{-1})(x)$ است پس داریم:

$$g^{-1}(f^{-1}(x))=1+(4-2x)^3\xrightarrow{f^{-1}(x)=2x-1}$$

$$g^{-1}(2x-1)=1+(4-2x)^3$$

همچنین طبق خاصیت تابع وارون می‌توان نوشت:

$$g(1+(4-2x)^3)=2x-1$$

حال با استفاده از تغییر متغیر $1+(4-2x)^3=t$ ضابطهٔ تابع g را تعیین می‌کنیم:

$$1+(4-2x)^3=t\Rightarrow(4-2x)^3=t-1$$

$$\xrightarrow{\sqrt[3]{\ }}4-2x=\sqrt[3]{t-1}\Rightarrow 2x=4-\sqrt[3]{t-1}$$

$$\Rightarrow x=2-\frac{\sqrt[3]{t-1}}{2}$$

در نهایت می‌توان نوشت:

$$g(t)=2(2-\frac{\sqrt[3]{t-1}}{2})-1=4-\sqrt[3]{t-1}-1=3-\sqrt[3]{t-1}$$

$$\Rightarrow g(x)=3-\sqrt[3]{x-1}$$

راه حل دوم:

$$y=1+(4-2x)^3\Rightarrow 4-2x=\sqrt[3]{y-1}$$

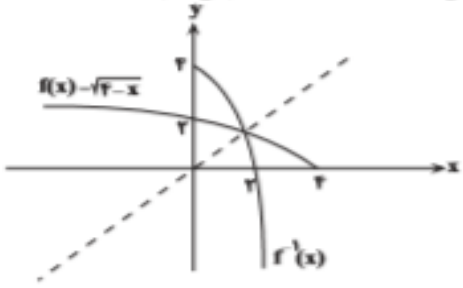
$$\Rightarrow x=\frac{1}{2}(4-\sqrt[3]{y-1})\Rightarrow fog=2-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x-1}$$

$$\frac{g(x)+1}{2}=2-\frac{1}{2}\sqrt[3]{x-1}\Rightarrow g(x)=3-\sqrt[3]{x-1}$$

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۱ تا ۱۴ و ۲۲ تا ۳۹)

۱۳۱- گزینهٔ «۴» (عباس اشرفی)

نمودار دو تابع $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ را رسم می‌کنیم.



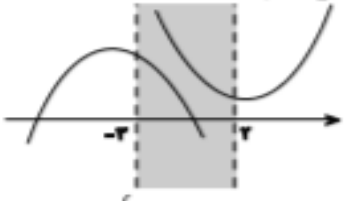
با توجه به شکل، کافی است نمودار تابع $f^{-1}(x)$ را بیش از ۲ واحد به سمت راست انتقال دهیم تا دو نمودار یکدیگر را قطع نکنند یعنی $m > 2$

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۲۶ تا ۲۹)

۱۳۲- گزینهٔ «۴» (امیدی برتی)

برای اینکه تابع در نقطهٔ $(-3,2)$ اکیداً نزولی باشد، سه حالت قابل قبول است:

حالت اول: نقطهٔ سهمی رو به پایین و رأس قبل از $x=-3$ باشد:



$$f(x)=(k+2)x^2-12x+5 \Rightarrow \begin{cases} k+2<0 \to k<-2 \quad ① \\ x_s=\frac{12}{2(k+2)}=\frac{6}{k+2}\le -3 \\ \xrightarrow{k+2<0} k+2\ge -2 \to k\ge -4 \quad ② \end{cases}$$

اشتراک ① و ② $\Rightarrow -4\le k<-2$

حالت دوم: نقطهٔ سهمی رو به بالا و رأس بعد از $x=2$ باشد:

$$\begin{cases} k+2>0 \Rightarrow k>-2 \\ x_s=\frac{6}{k+2}\ge 2 \xrightarrow{k+2>0} k+2\le 3 \to k\le 1 \end{cases}$$

اشتراک $\Rightarrow -2<k\le 1$

حالت سوم: ضریب x^2 برابر صفر و تابع خطی باشد:

$k+2=0 \Rightarrow k=-2 \Rightarrow f(x)=-12x+5$ تابع f اکیداً نزولی

اجتماع جواب‌های سه حالت فوق برابر با $-4\le k\le 1$ است که شامل ۶ مقدار صحیح است.

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۶ تا ۱۰)

۱۳۳- گزینهٔ «۳» (سمیر یاغی)

با توجه به شرط مسئله داریم:

$$gof = fo\frac{1}{f} \Rightarrow g(f(x)) = f(\frac{1}{f(x)})$$

فرض کنیم $f(x)=t$ باشد:

$$g(t)=f(\frac{1}{t}) \Rightarrow g(t)=\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}-1}=\frac{\frac{1}{t}}{\frac{1-t}{t}}=\frac{1}{1-t} \Rightarrow g(x)=\frac{1}{1-x}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1}{1-x}-1}=\frac{\frac{1}{1-x}}{\frac{1-1+x}{1-x}}=\frac{1}{x}$$

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۱۱ تا ۱۴، ۲۲ و ۲۳)

۱۳۴- گزینهٔ «۴» (مقدمه‌ساز پیشوایی)

ابتدا برد تابع $g(x)$ را می‌یابیم:

$$-1<[\cos x]-\cos x\le 0 \Rightarrow R_g=(-1,0]$$

چون تابع f در بازه $(-1,0]$ اکیداً یکنواخت، با قرار دادن ابتدا و انتهای آن در تابع f، برد تابع fog آن را به‌دست می‌آوریم:

$$f(-1)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

پس $R_{fog}=[\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$ است.

(تابع) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۱۱ تا ۱۴، ۲۲ و ۲۳)

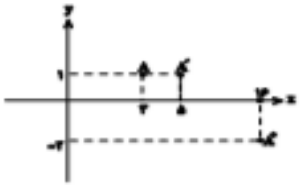
۱۳۵- گزینهٔ «۲» (سمیر علیزاده)

$$A=(2,1)\in y=f(2x-1) \Rightarrow 1=f(2(2)-1) \Rightarrow f(5)=1$$

پس نقطهٔ $A'(5,1)$ واقع بر منحنی تابع $y=f(x)$ می‌باشد.

$$A'(5,1) \xrightarrow{\text{xهامنهای یک}} (2,1) \xrightarrow{\text{xهاتقسیم بر } \frac{1}{2}} (16,1)$$

$$\xrightarrow{\text{yهادر ۳- ضرب}} (16,-3) \xrightarrow{\text{yها به اضافه یک}} A''(16,-2)$$

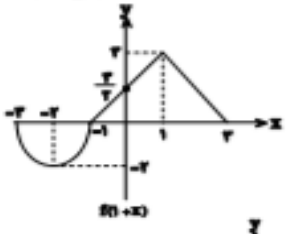


تابع یکنواخت $\Rightarrow$ تابع نزولی است $\Rightarrow g=\{(2,1),(5,1),(16,-2)\}$

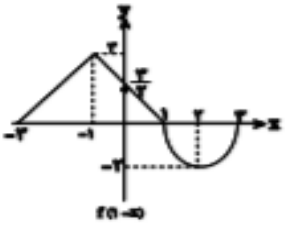
(ترکیبی) (ریاضی ۱، مقدمه‌ای ۱۳ تا ۱۷) (ریاضی ۲، مقدمه‌ای ۴۸ و ۶۹) (ریاضی ۳، مقدمه‌ای ۱۵ تا ۲۳)

۱۳۶- گزینهٔ «۴» (مقدم ابراهیم توزندهانی)

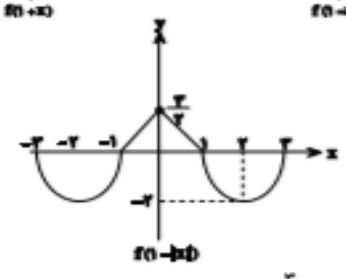
به کمک رسم نمودار، معادله را حل می‌کنیم. بنابراین به ترتیب $f(1+x)$، $f(1-x)$، $f(1-|x|)$ و در نهایت $y=|f(1-|x|)|$ را رسم می‌کنیم:



f(1+x)



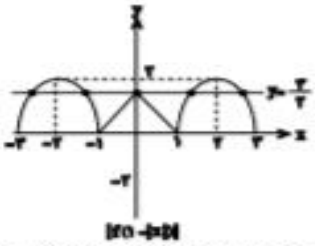
f(1-x)



f(1-|x|)

با توجه به نمودار زیر، خط $y=\frac{3}{2}$ منحنی را در ۵ نقطه قطع می‌کند.

www.mapedu.ir



(ترکیبی از ریاضی ۱ مقدمه‌ای ۱۳ تا ۱۷) (ریاضی ۲ مقدمه‌ای ۶۱ و ۶۳) (ریاضی ۳ مقدمه‌ای ۱۵ تا ۲۳)

---

۱۳۷ – گزینهٔ «۳» (علی ساجدی)

در رابطهٔ $f(2-g(x))=\sqrt[3]{x+1}$ قرار می‌دهیم $x=7$:

$$f(2-g(7))=\sqrt[3]{8}=2 \xrightarrow{f(5)=2,\ f\ \text{یک‌به‌یک}}$$
$$2-g(7)=5 \Rightarrow g(7)=-3$$

(تابع) (ریاضی ۳ مقدمه‌ای ۱۱ تا ۱۴ و ۲۲ تا ۲۹)

---

۱۳۸ – گزینهٔ «۴» (احسان غفرزاده)

چون g یک تابع خطی است پس ضابطهٔ آن به‌صورت $g(x)=ax+b$ است. از طرفی به ازای $x=1$ داریم:

$$g(x+1)+g(1-x)=2 \xrightarrow{x=1} g(2)+g(0)=2$$

در تابع g، یکبار $g(0)$ و یکبار $g(2)$ را می‌یابیم:

$$\begin{cases} g(0)=b \\ g(2)=2a+b \end{cases} \xrightarrow{+} 2a+2b=2 \Rightarrow a+b=1 \quad ①$$

از طرفی $g(2)=3$ است پس داریم:

$$g(2)=2a+b=3 \quad ②$$

به کمک روابط ① و ② داریم:

$$\begin{cases} 2a+b=3 \xrightarrow{\times(-1)} \\ a+b=1 \xrightarrow{\times(1)} \end{cases} \begin{cases} -2a-b=-3 \\ a+b=1 \\ \hline -a=-2 \Rightarrow a=2,\ b=-1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow g(x)=2x-1 \Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{x+1}{2} \Rightarrow g^{-1}(5)=3,\ g(5)=9$$

$$\Rightarrow (g^{-1}+2g)(5)=g^{-1}(5)+2g(5)=3+2(9)=21$$

(ترکیبی از ریاضی ۲ مقدمه‌ای ۵۷ تا ۶۰) (ریاضی ۳ مقدمه‌ای ۲۴ تا ۲۹)

---

۱۳۹ – گزینهٔ «۱» (لیوزار مدرس)

ابتدا وارون تابع $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$y=f(x)=x^3-6x^2+12x-5$$
$$y=(x-2)^3+3 \Rightarrow y-3=(x-2)^3 \Rightarrow \sqrt[3]{y-3}=(x-2)$$
$$\Rightarrow x=\sqrt[3]{y-3}+2 \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-3}+2$$
$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+a}-b=\sqrt[3]{x-3}+2$$
$$\begin{cases} a=-3 \\ b=-2 \end{cases}$$

برای منطبق شدن تابع $f^{-1}(x)$ بر $\sqrt[3]{x}$، باید تابع $f^{-1}(x)$، ۳ واحد در جهت منفی محور xها و ۲ واحد نیز در جهت منفی محور yها انتقال یابد، یعنی:

$$\begin{matrix} x \to x+3 \\ y \to y-2 \end{matrix} \Rightarrow y=(\sqrt[3]{(x+3)-3}+2)-2=\sqrt[3]{x}$$

در ادامه داریم:

$$f^{-1}(a+b)=f^{-1}(-5)=\sqrt[3]{-5-3}+2=-2+2=0$$

(ترکیبی از ریاضی ۱ مقدمه‌ای ۱۳ تا ۱۷) (ریاضی ۲ مقدمه‌ای ۵۷ تا ۶۴) (ریاضی ۳ مقدمه‌ای ۱۵ تا ۲۹)

---

۱۴۰ – گزینهٔ «۳» (ایمان مرادی)

ابتدا ضابطهٔ وارون f را به‌دست می‌آوریم:

$$y+1=x^2+4x \Rightarrow y+5=x^2+4x+4$$
$$\Rightarrow y+5=(x+2)^2 \xrightarrow{x\geq -2} x+2=\sqrt{y+5}$$
$$x=\sqrt{y+5}-2 \Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x+5}-2$$

اکنون برای یافتن محل تقاطع f^{-1} و g، ضابطه‌های آن‌ها را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$\sqrt{x+5}-2=\frac{2x-3}{5}$$

و بهتر است به‌جای حل معادله، گزینه‌ها را آزمایش کنیم:

$x=2 \Rightarrow \sqrt{7}-2=\frac{4-3}{5}$ برقرار نیست

$x=20 \Rightarrow \sqrt{25}-2=\frac{40-3}{5}$ برقرار نیست

$x=4 \Rightarrow \sqrt{9}-2=\frac{8-3}{5}$ برقرار است

$x=16 \Rightarrow \sqrt{21}-2=\frac{32-3}{5}$ برقرار نیست

(ترکیبی از ریاضی ۲ مقدمه‌ای ۵۷ تا ۶۴) (ریاضی ۳ مقدمه‌ای ۲۴ تا ۲۹)

---

۱۴۱ – گزینهٔ «۴» (منصور غلامزاده)

ابتدا وارون $f(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$$2^{-x+1}-3=y \to 2^{-x+1}=y+3 \Rightarrow -x+1=\log_2^{(y+3)}$$
$$\Rightarrow x=1-\log_2^{(y+3)} \xrightarrow[\text{عوض}]{\text{جای x و y}} y=f^{-1}(x)=1-\log_2^{(x+3)}$$
$$\Rightarrow D_{f^{-1}}: x>-3$$
$$D_{g(f^{-1}(x))}=\{x\in D_{f^{-1}}, f^{-1}(x)\in D_g\}$$
$$\Rightarrow \{x>-3, 1-\log_2^{(x+3)}>0\} \Rightarrow \log_2^{(x+3)}<1 \Rightarrow x+3<2 \Rightarrow x<-1$$
$$\Rightarrow D_{g(f^{-1}(x))}=(-3,-1) \Rightarrow \text{وسط بازه}=\frac{-3+(-1)}{2}=-2$$

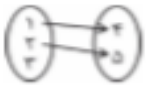
(ترکیبی از ریاضی ۲ مقدمه‌ای ۵۷ تا ۶۴) (ریاضی ۳ مقدمه‌ای ۱۱ تا ۲۹)

اختلال وسواس فکری

۱ـ کدام تابع است؟

۱) $f(x)=\begin{cases} x^2 & x\geq 0 \\ x^3 & x\leq 1 \end{cases}$

۲) $f(x)=\begin{cases} [x] & x\geq 0 \\ x-|x| & x<1 \end{cases}$

۳) 

۴) $y=\sqrt{x-2}\pm\sqrt{3-x}$

پاسخ: گزینه ۲ (صفحه۹۵تا۱۰۰-متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

اگر رابطه‌ی f از A به B بخواهد تابع باشد باید به‌ازای هر x که از A انتخاب می‌کنیم دقیقاً یک y وجود داشته باشد که عضو B باشد.
بنابراین اگر x ی در A موجود باشد که به‌ازای آن y ی در B وجود نداشته باشد و یا x ی در A موجود باشد که به‌ازای آن بیش از یک y در B موجود باشد رابطه‌ی مورد نظر تابع نیست. بنابراین اگر قرار است نموداری مربوط به تابع باشد، باید خطوط موازی محور y ها، نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کنند.

بررسی گزینه‌ها:

۱) به‌ازای $x=\frac{1}{2}$ دو y داریم $\frac{1}{4}$ از ضابطه بالا و $\frac{1}{8}$ از ضابطه پایین.

۲) ظاهراً $0\leq x<1$ xهای مشترک دو ضابطه هستند ولی چون به‌ازای این xها $[x]=x-|x|=0$ پس گزینه ۲ تابع است.

۳) تابع نیست زیرا برای $x=3$، y وجود ندارد.

۴) تابع نیست زیرا برای $x=2/5$ دو y داریم.

سؤالات منتخب

۱. رابطه $f=\{(3,1),(1,1),(2,4),(3,m+2),(m,2)\}$ به ازای کدام مقادیر m تابع است؟

۱) ۱- و ۲ ۲) ۲- و ۱ ۳) فقط ۱- ✓ ۴) فقط ۲

۲. اگر $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & x\geq 1 \\ ax+b & x\leq 1 \end{cases}$ تابع باشد $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ✓ ۳) ۳ ۴) ۴

گروه آموزشی ماز

۲ـ دامنه‌ی تابع $\sqrt{x-1}+\sqrt{y}=3$ بازه‌ای از اعداد حقیقی است طول بازه برابر کدام است؟

۱) ∞ ۲) ۹ ۳) ۳ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

دامنه‌ی یک تابع مجموعه‌ی x های آن است که به‌ازای آنها $f(x)$ یا همان y وجود داشته باشد.
برد یک تابع مجموعه‌ی y های آن است که به‌ازای x ها یا همان دامنه به‌دست می‌آیند.

اولاً به خاطر $\sqrt{x-1}$ باید $(x\geq 1)$ باشد ثانیاً چون $\sqrt{y}=3-\sqrt{x-1}$ دو طرف معادله باید نامنفی باشند، یعنی:

$3-\sqrt{x-1}\geq 0 \Rightarrow 3\geq\sqrt{x-1}\Rightarrow 9\geq x-1\Rightarrow 10\geq x$

بنابراین دامنه‌ی تابع بازه‌ی $[1,10]$ است که طول آن ۹ واحد است.
دقّت کنید در این سؤال برد تابع بازه‌ی $[0,9]$ بود.

۳ - اگر دامنه‌ی تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{b-x}}{[x]-c}$ به‌صورت $[۱,۳)\cup\{d\}$ باشد حاصل $a+b+c+d$ برابر کدام است؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) ۱۴

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

دامنه‌ی $f(x)=\sqrt{g(x)}$ برابر مجموعه زیر است:

$$\{x\in D_g \mid g(x)\geq ۰\}$$

و دامنه‌ی $f(x)=\frac{۱}{g(x)}$ برابر مجموعه‌ی زیر است.

$$\{x\in D_g \mid g(x)\neq ۰\}$$

اگر $y=g(x)$ چندجمله‌ای باشد، دامنه آن $\mathbb{R}$ است.

و جواب معادله‌ی $[x]=k$ به‌صورت $k\leq x<k+۱$ است.

دامنه‌ی $f(x)=\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{b-x}}{[x]-c}$ به‌صورت زیر است:

$$[a,b]-[c,c+۱)=[۱,۳)\cup\{d\}$$

در واقع $a=۱$ و $b=d=c+۱$ و $c=۳$ پس $b=d=۴$ و بنابراین:

$$a+b+c+d=۱۲$$

دقّت کنید $[۱,۴]-[۳,۴)=[۱,۳)\cup\{۴\}$

گروه آموزشی ماز

۴ - اگر $۰<x\leq ۲$ و $x\neq ۱$ باشد برد $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ کدام است؟

۱) $(-۱,۱]$ ۲) $(-\infty,-۱)\cup[۱,+\infty)$ ۳) $[۱,+\infty)$ ۴) $(-۱,+\infty)$

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط)

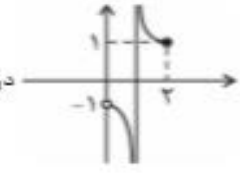
هر تست ماز یک کلاس درس!

دامنه‌ی یک تابع مجموعه مقادیر x های آن است (یا محدوده‌ای که تصویر نمودار روی محور x ها ایجاد می‌کند).

برد یک تابع مجموعه مقادیر y های آن است (یا محدوده‌ای که تصویر نمودار روی محور y ها ایجاد می‌کند).

نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را می‌شناسیم همین‌طور نمودار $y=\frac{۱}{x-۱}$ که به شکل

است.

حال با محدود کردن دامنه‌ی آن به $(-\infty,۲]-\{۱\}$ نمودار به‌صورت 

درمی‌آید که برد آن $(-\infty,-۱)\cup[۱,\infty)$.

۵ - چند جفت از توابع زیر با هم برابرند؟

الف) $g(x)=\sqrt{x^2-4}$ $\quad f(x)=\sqrt{x-2}\sqrt{x+2}$

ب) $g(x)=|x|\sqrt{x-1}$ $\quad f(x)=\sqrt{x^2(x-1)}$

پ) $g(x)\ \sqrt{x}$ $\quad f(x)\ \frac{x}{\sqrt{x}}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ٤ (صفحه ۵۰ متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

دو تابع g, f را برابر گوییم هرگاه:

اولاً: دامنه‌های برابر داشته باشند. $(D_f = D_g)$

ثانیاً: ضابطه‌های یکسان داشته باشند.

یعنی به‌ازای هر x از دامنه‌ی یکسان داشته باشیم: $f(x)=g(x)$

بررسی موارد:

الف) دو تابع دامنه‌ی تابرابر دارند. $D_f=[2,+\infty)\,,\,D_g=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$

ب) این دو تابع هم دامنه‌ی تابرابر دارند. $D_f=\{-\}\cup[1,+\infty)\,,\,D_g=[1,+\infty)$

پ) این دو تابع هم دامنه‌ی تابرابر دارند. $D_f=(-,+\infty)\,,\,D_g=[-,+\infty)$

گروه آموزشی ماز

۶- $f(x)=\frac{2x^3+ax^2+bx+c}{mx^2+nx+k}$ ضابطه‌ی تابع همانی با دامنه‌ی $\mathbb{R}-\{1\}$ است $a+b+c+m+n+k$ برابر کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۴ ۴) ۴-

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

۱) ضابطه‌ی تابع همانی به‌صورت $f(x)=x$ است و ضابطه‌ی تابع ثابت به‌صورت $f(x)=k$ که در آن k عددی ثابت است.

۲) دامنه توابع گویا، تمام اعداد حقیقی است به‌جز ریشه‌های مخرج.

باید $f(x)=x$ باشد و $x=1$ هم تنها ریشه‌ی مخرج بنابراین اولاً مخرج به‌صورت زیر است.

$$m(x-1)^2=mx^2-2mx+m \Rightarrow n=-2m, k=m$$

ثانیاً:

$$\frac{2x^3+ax^2+bx+c}{mx^2+nx+k}=x \Rightarrow$$

$$2x^3+ax^2+bx+c=mx^3+nx^2+kx \Rightarrow m=2, n=a, k=b, c=-$$

از طرفی چون $n=-2m$ و $k=m$ بود بنابراین:

$$m=k=b=2, n=a=-4, c=- \Rightarrow a+b+c+m+n+k=-2$$

www.biomaze.ir

۷- توابع $y_1=\sqrt{x}$ و $y_2=|x|$ مفروضند، در صورتیکه y_1 را ۲ واحد به سمت چپ ببریم و یک واحد بالا و y_2 را ۳ واحد به راست ببریم و ۱ واحد پایین نقاط برخورد دو تابع جدید چگونه است؟

۱) دو برخورد سمت راست محور y

۲) دو برخورد دو طرف محور y

۳) یک برخورد سمت راست محور y

۴) برخورد ندارند

پاسخ: گزینه ۲ (ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

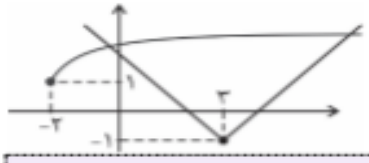
اگر $k > 0$ باشد:

ضابطه	نمودار
$y = f(x-k)$	k واحد به سمت راست
$y = f(x+k)$	k واحد به سمت چپ
$y = f(x)+k$	k واحد به سمت بالا
$y = f(x)-k$	k واحد به سمت پایین

$$y_1 = \sqrt{x} \xrightarrow{\text{دو واحد چپ}} \sqrt{x+2} \xrightarrow{\text{یک واحد بالا}} \sqrt{x+2}+1$$

$$y_2 = |x| \xrightarrow{\text{سه واحد راست}} |x-3| \xrightarrow{\text{یک واحد پایین}} |x-3|-1$$

حالا یا باید نمودار توابع به‌دست اومده رو دقیق رسم کنیم یا معادله برخورد اونارو حل کنیم که البته پیشنهاد من رسم دقیق، هم راحت‌تره هم کم اشتباه‌تره و همین‌طور که می‌بینی دو برخورد دارند. در دو طرف y ها (یا محاسبه‌ی مقدار دو تابع در $x = 0$ دقیق‌تر رسم می‌کنیم).



سؤالات منتخب

ریشه‌ی معادله‌ی $\sqrt{x+2}+2 = |x-3|$ چگونه است؟

۱) دو ریشه مثبت ۲) دو ریشه‌ی غیر هم‌علامت ✓ ۳) یک ریشه مثبت ۴) فاقد ریشه

گروه آموزشی ماز

۸- ضابطه‌ی تابع $y_2 = mx^3 + nx^2 + 3x + 2$ به کمک انتقال از روی $y_1 = x^3$ به‌دست آمده است اگر (x,y) روی y_1 باشد مختصات نقطه متناظر آن روی y_2 کدام است؟ $(n > 0)$

۱) $(x+1, y+1)$ ۲) $(x-1, y+1)$ ۳) $(x-1, y+3)$ ۴) $(x+1, y+3)$

پاسخ: گزینه ۲ (صفحه۲۱تا۵-متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

انتقال یافته‌ی $y_1 = x^3$ به‌صورت $y_2 = (x-a)^3 + b$ است که اگر $(a > 0)$ باشد y_1، a واحد به سمت راست و اگر $(a < 0)$ باشد y_1، $|a|$ واحد به سمت چپ منتقل شده است.

و اگر $(b > 0)$ باشد y_1، b واحد به بالا منتقل شده و اگر $(b < 0)$ باشد، y_1، $|b|$ واحد به پایین منتقل می‌شود و در هر صورت متناظر نقطه‌ی (x,y) که روی y_1 قرار دارد روی y_2 به‌صورت $(x+a, y+b)$ است.

اوّلاً با توجّه به این که y_2 انتقال یافته‌ی y_1 است، $m = 1$ است از طرفی:

$$y_2 = x^3 + nx^2 + 3x + 2 = (x+1)^3 + 1$$

در واقع $n = 3$ است.

بنابراین با توجّه به درسنامه، متناظر (x,y) که روی y_1 قرار دارد روی نمودار y_2 به‌صورت $(x-1, y+1)$ یعنی گزینه ۲ است.

www.biomaze.ir

۹- اگر $y = f(x)$ ضابطه‌ی تابعی نزولی با دامنه‌ی $[0, +\infty)$ باشد دامنه‌ی $y = \sqrt{f(8-2x) - f(x+2)}$ کدام است؟

۱) $[2, 4]$ ۲) $[-, 2]$ ۳) $[-2, 2]$ ۴) $[-2, 4]$

www.mapedu.ir

پاسخ: گزینه ۱ (صفحه۷تا۱۰-متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

f صعودی است هرگاه $(x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) \geq f(x_1))$

f اکیداً صعودی است هرگاه $(x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) > f(x_1))$

f نزولی است هرگاه $(x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) \leq f(x_1))$

f اکیداً نزولی است هرگاه $(x_2 > x_1 \Leftrightarrow f(x_2) < f(x_1))$

روش اول: اوّلاً به خاطر این که دامنه‌ی f اعداد تامتفی است باید: $x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2 , 8-2x \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$

ثانیاً به خاطر تعریف شدن رادیکال و نزولی بودن f داریم: $f(8-2x)-f(x+2) \geq 0 \Rightarrow$

$f(8-2x) \geq f(x+2) \Rightarrow 8-2x \leq x+2 \Rightarrow 2 \leq x$

در آخر اشتراک همه این‌ها $[2,4]$ است.

روش دوم: استفاده از اختلاف گزینه‌ها یعنی ابتدا عددی را انتخاب کنیم که در بعضی از گزینه‌ها هست و در بعضی نیست مثلاً $x=4$ که در گزینه‌های ۱ و ۴ هست و در بقیه نیست حال با قرار دادن آن در تابع داریم: $y=\sqrt{f(0)-f(6)}$

که با توجّه به نزولی بودن f، $f(0) \geq f(6) \Rightarrow f(0)-f(6) \geq 0$ و زیر رادیکال تامتفی است. پس $x=4$ جزء جواب است و در نتیجه گزینه‌های شامل آن می‌توانند جواب باشند یعنی گزینه ۱ یا ۴. حال عدد دیگری انتخاب می‌کنیم که در یکی از گزینه‌های باقی‌مانده باشد و در دیگری نباشد. مثلاً $x=-2$ در گزینه ۴ هست و در گزینه ۱ نیست و به‌ازای آن داریم:

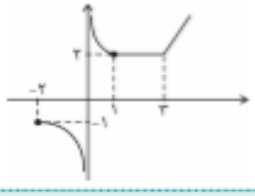
$y=\sqrt{f(12)-f(0)}$

که چون f نزولی است $f(0) \geq f(12)$ و زیر رادیکال متفی است پس گزینه شامل $x=-2$ یعنی گزینه ۴ غلط است و جواب گزینه ۱ می‌باشد.

نکته: در تمامی تست‌هایی که جواب آن به‌صورت مجموعه باشد می‌توانید از این روش استفاده کنید، مثلاً تست‌های مربوط به حل نامعادلات و یا دامنه توابع و بعداً معادلات مثلثاتی و....

گروه آموزشی ماز

۱۰ - با توجّه به نمودار زیر کدام گزینه نادرست است؟



۱) تابع در بازه‌ی $[-2,1]$ اکیداً نزولی است.

۲) تابع در بازه‌ی $(0,3]$ نزولی است.

۳) تابع در بازه‌ی $[1,+\infty)$ صعودی است.

۴) تابع در بازه‌ی $[1,3]$ هم صعودی است و هم نزولی است.

پاسخ: گزینه ۱ (صفحه۶تا۱۰-ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

تابع f را اکیداً صعودی می‌گوییم هرگاه با حرکت روی نمودار آن از چپ به راست به سمت بالا برویم.

تابع f را صعودی می‌گوییم هرگاه با حرکت روی نمودار آن از چپ به راست به سمت پایین نرویم.

تابع f را اکیداً نزولی می‌گوییم هرگاه با حرکت روی نمودار آن از چپ به راست به سمت پایین برویم.

تابع f را نزولی می‌گوییم هرگاه با حرکت روی نمودار آن از چپ به راست به سمت بالا نرویم.

تابع ثابت هم صعودی است و هم نزولی است.

سؤالات منتخب

تابع $f(x)=\begin{cases} x^3-1 & x \geq 1 \\ ax-2 & x<1 \end{cases}$ اکیداً صعودی است حدود a کدام است؟

۱) $0 \leq a \leq 2$ ۲) $0 < a \leq 2$ ✓ ۳) $0 < a < 2$ ۴) $0 \leq a < 2$

دقت کنید به ازای $a=0$ قسمتی از تابع ثابت می‌شود و دیگر اکیدا یکنوا نمی‌باشد.

www.mapedu.ir

۱۱ - تابع $y=a\sqrt{4x^2-4x+1}+\sqrt{9x^2-6x+1}$ در بازه‌ی $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$ تابع ثابت $y=k$ است. مقدار ak کدام است؟

۱) $-/75$ ۲) $-/5$ ۳) $-/25$ ۴) $1/25$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۱- صفحه ۱۱۰ تا ۱۱۲ - متوسط)

$$y=a\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{(3x-1)^2}$$
$$=a|2x-1|+|3x-1|$$

در بازه $\left[\frac{1}{3},\frac{1}{2}\right]$ مقدار $2x-1$ منفی و $3x-1$ مثبت است پس:

$$y=a(1-2x)+(3x-1)=(3-2a)x+a-1$$

اگر این تابع همان تابع ثابت $y=k$ باشد پس:

$$\begin{cases}3-2a=0\\a-1=k\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=\frac{3}{2}\\k=\frac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow ak=\frac{3}{4}$$

گروه آموزشی ماز

۱۲ - هرگاه $D_f=[-2,1]$ و $g(x)=f\left(\sqrt{1-\frac{3x}{2}}\right)$ باشد، دامنه تابع $y=g(x)$ کدام است؟

۱) $[0,1]$ ۲) $\left[0,\frac{2}{3}\right]$ ۳) $\left[\frac{2}{3},1\right]$ ۴) $\left[-2,\frac{2}{3}\right]$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳- صفحه ۱۱ تا ۱۴ - متوسط)

اولاً $1-\frac{3}{2}x\geq 0\Rightarrow x\leq\frac{2}{3}$

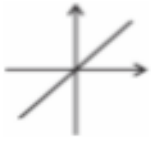
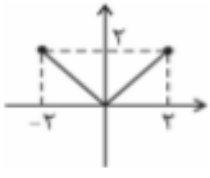
ثانیاً $-2\leq\sqrt{1-\frac{3}{2}x}\leq 1\Rightarrow 1-\frac{3}{2}x\leq 1\Rightarrow x\geq 0$

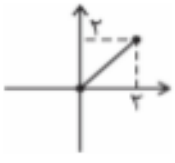
$$\Rightarrow x\in\left[0,\frac{2}{3}\right]\Rightarrow D_g=\left[0,\frac{2}{3}\right]$$

نکته: $D_{fog}=\{x\in D_g : g(x)\in D_f\}$

www.biomaze.ir

۱۳ - با فرض $f(x)=\sqrt{4-x^2}$، نمودار تابع $y=fof(x)$ کدام است؟

۱) 
۲)
۳) 

۴) 

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳- صفحه ۱۴ تا ۲۲ - متوسط)

ابتدا ضابطه و دامنه $y=fof$ را به‌دست می‌آوریم:

$$fof(x)=\sqrt{4-f^2}=\sqrt{4-(4-x^2)}=\sqrt{x^2}=|x|$$

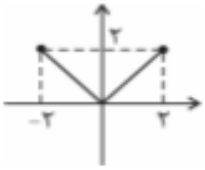
امّا:

$$D_{fof}=\{x\in D_f : f(x)\in D_f\}$$

$$D_f=[-2,2]\ ,\ \underbrace{-2\leq\sqrt{4-x^2}}_{\text{بدیهی}}\leq 2$$

$$4-x^2\leq 4\Rightarrow -x^2\leq 0\Rightarrow \underbrace{x^2\geq 0}_{\text{بدیهی}}\Rightarrow D_{fof}=D_f=[-2,2]$$

یعنی نمودار به‌صورت مقابل است:



گروه آموزشی ماز

۱۴ - اگر $f(x)=[-x]$ باشد، برد تابع $y=f(x-f(-x))$ کدام است؟

۱) $\{0,-1\}$ ۲) $\{0,1\}$ ۳) $\{0\}$ ۴) $\{0,1,-1\}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳- صفحه ۱۴ - ساده)

ابتدا ضابطه تابع را به‌دست می‌آوریم.

$$y=[-x+[x]]=[x]+[-x]$$

امّا می‌دانیم $[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$ پس برد تابع $\{0,-1\}$ است.

نکته: اگر k عددی صحیح باشد آنگاه $[x+k]=[x]+k$.

۱۵ - در تابع خطّی f روابط $f(a-b)=3a+b$ و $f(a+b)=b-a$ برقرار است. مقدار $f(a)$ کدام است؟

۱) $a-b$ ۲) $a+2b$ ۳) $2a-b$ ۴) $b+a$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۱- صفحه ۱۰۳، ۱۰۴ و ۱۰۸ - متوسط)

روش اول: در یک تابع خطّی، اگر $f(x_1)=y_1$ و $f(x_2)=y_2$ باشد آنگاه:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)=\frac{y_1+y_2}{2}$$

$$f\left(\frac{(a+b)+(a-b)}{2}\right)=\frac{(3a+b)+(b-a)}{2}\Rightarrow f(a)=a+b$$

روش دوم: تابع خطّی f را به‌صورت $f(x)=mx+h$ در نظر می‌گیریم.

$$\begin{matrix}f(a-b)=m(a-b)+h=3a+b\\ f(a+b)=m(a+b)+h=b-a\end{matrix}\xrightarrow{\text{جمع}}m(a-b+a+b)+2h=2a+2b\Rightarrow ma+h=a+b\Rightarrow f(a)=a+b$$

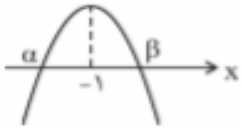
گروه آموزشی ماز

۱۶ - دامنه و برد تابع $y=1-2\sqrt{-x^2-2x+b}$ یک بازه‌ی بسته‌ی یکسان است. مقدار b کدام است؟

۱) -8 ۲) -3 ۳) 3 ۴) 8

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲- صفحه ۵۲ و ۵۳ - متوسط)

فرض کنید نمودار سهمی $f(x)=-x^2-2x+b$ به‌صورت مقابل باشد در این صورت دامنه تابع به‌صورت $[\alpha,\beta]$ است.



$$\text{طول راس}=-\frac{b}{2a}=-\frac{-2}{2(-1)}=-1$$

برد تابع به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$0\le f(x)\le f(-1)\Rightarrow 0\le\sqrt{f(x)}\le\sqrt{f(-1)}\Rightarrow 1-2\sqrt{f(-1)}\le y\le 1$$

اگر بخواهد برد و دامنه برابر باشد پس: $\beta=1$

از طرفی در تابع $f(x)=-x^2-2x+b$ داریم:

$$\beta=1\rightarrow\begin{cases}\alpha+\beta=-2\\ \alpha\beta=-b\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=-3\\ b=3\end{cases}$$

۱۷- اگر $f(x)=x+|x|$ و $g(x)=8-2|x+1|$ باشد. برد تابع $y=(f\cdot g)(x)$ کدام است؟

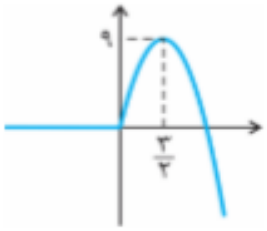
۱) $(-\infty,6]$ ۲) $(-\infty,9]$ ۳) $\left[-\frac{3}{2},6\right]$ ۴) $\left[-\frac{3}{2},9\right]$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲- صفحه ۶۹- متوسط)

نکته: رأس سهمی $y=ax^2+bx+c$ نقطه $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ است.

$$y=(f\cdot g)(x)=(x+|x|)(8-2|x+1|)=\begin{cases}0 & x<0\\ 2x(8-2(x+1)) & x\geq 0\end{cases}=\begin{cases}0 & x<0\\ -4x(x-3) & x\geq 0\end{cases}$$

نمودار تابع را رسم می‌کنیم دقت کنید رأس سهمی $y=-4x(x-3)$ نقطه $\left(\frac{3}{2},9\right)$ است.



$\Rightarrow$ برد $=(-\infty,9]$

۱۸- در یک تابع غیر ثابت، برای هر a و b حقیقی رابطه‌ی $f(a+b)=f(a)f(b)$ برقرار است. اگر $f(0)\neq 0$ باشد، حاصل $f(-2)$ با کدام گزینه نمی‌تواند برابر باشد؟

۱) $f\left(\frac{1}{2}\right)$ ۲) $f(2)$ ۳) $-f(2)$ ۴) $\frac{1}{f(2)}$

پاسخ: گزینه ۳

فرض کنید $a=b=\frac{x}{2}$ پس:

$$f\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=f\left(\frac{x}{2}\right)f\left(\frac{x}{2}\right)\Rightarrow f(x)=f^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

پس $f(x)$ نمی‌تواند منفی باشد.

از طرفی اگر فرض شود که $a=2$ و $b=-2$ و $f(2)=0$ باشد، آنگاه $f(2-2)=f(2)f(-2)$ پس $f(0)=0$ که با فرض سوال $(f(0)\neq 0)$ در تناقض است پس $f(2)\neq 0$ در نتیجه $f(2)$ مثبت است یعنی هرگز $f(-2)$ با عدد، $-f(2)$ نمی‌تواند برابر باشد. (توجه شود که $f(x)$ نمی‌تواند منفی باشد پس $f(2)$ و $f(-2)$ نمی‌توانند منفی باشند، پس $f(-2)\neq -f(2)$)

۱۹- نمودار تابع $y=f(2-x)$ در شکل مقابل آورده شده است. نمودار $y=f(x)$ را لااقل چند واحد به سمت چپ انتقال دهیم تا نمودار $y=f(x)$ از ناحیه اوّل عبور نکند؟

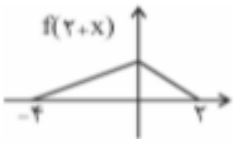
۱) ۲ ۲) ۴
۳) ۸ ۴) ۶

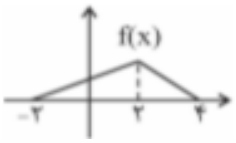
پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳- صفحه ۱۵ تا ۲۳ - ریاضی ۱- صفحه ۱۱۱ تا ۱۱۶- ساده)

نکته: جدول تبدیلات افقی به‌صورت زیر است: $(k>0)$

تابع	تبدیل انجام شده
$f(x-k)$	نمودار $f(x)$ را k واحد به راست منتقل می‌کنیم
$f(x+k)$	نمودار $f(x)$ را k واحد به چپ منتقل می‌کنیم
$f(-x)$	نمودار $f(x)$ را نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم

ابتدا به‌جای x، $-x$ را جایگزین می‌کنیم و سپس به‌جای x، $x-2$ را قرار می‌دهیم.





۲۰ - قرینه نمودار $f(x)=x^2-4x$ نسبت به مبدأ مختصات را، چند واحد به سمت y های مثبت انتقال دهیم تا از رأس سهمی f عبور کند؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳، صفحه ۱۵ تا ۲۳ - ریاضی ۱، صفحه ۱۱۱ تا ۱۱۶- متوسط)

نکته ۱: قرینه تابع $y=f(x)$ نسبت به مبدأ مختصات برابر است با $-f(-x)$.

نکته ۲: برای یافتن $f(x)+k$، نمودار f را k واحد به سمت بالا، و برای یافتن $f(x)-k$، نمودار f را k واحد به سمت پایین منتقل می‌کنیم. $(k>0)$

نکته ۳: رأس سهمی $y=ax^2+bx+c$ به‌صورت $\left(-\frac{b}{2a},-\frac{\Delta}{4a}\right)$ است.

$f(x)=x^2-4x$

قرینه نسبت به مبدأ: $y=-f(-x)=-\left((-x)^2-4(-x)\right)=-x^2-4x$

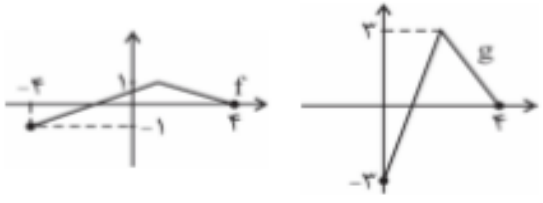
انتقال به بالا: $y=-x^2-4x+k$

حال برای اینکه منحنی حاصل، از راس سهمی f عبور کند، باید رأس سهمی $y=x^2-4x$ یعنی نقطه $(2,-4)$ در منحنی نهایی صدق کند.

$$\begin{cases} y=-x^2-4x+k \\ x=2 \\ y=-4 \end{cases} \Rightarrow -4=-4-8+k \Rightarrow k=8$$

گروه آموزشی ماز

۲۱ - نمودار $y=f(x)$ و $y=g(x)$ در شکل مقابل آورده شده است. دامنه و برد $y=\frac{1}{3}g(x+a)+1$ با دامنه و برد $y=f(2x)+b$ نظیر به نظیر برابرند. $a+b$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳، صفحه ۱۵ تا ۲۳ - ریاضی ۱، صفحه ۱۱۱ تا ۱۱۶- متوسط)

در جدول زیر تغییرات دامنه و برد را مشاهده می‌کنید.

تابع	$f(x)$	$f(2x)$	$f(2x)+b$
دامنه	$[-4,4]$	$[-2,2]$	$[-2,2]$
برد	$[-1,1]$	$[-1,1]$	$[-1+b,1+b]$

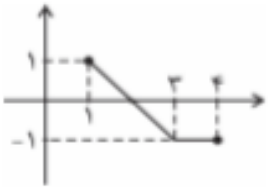
تابع	$g(x)$	$g(x+a)$	$\frac{1}{3}g(x+a)$	$\frac{1}{3}g(x+a)+1$
دامنه	$[0,4]$	$[-a,4-a]$	$[-a,4-a]$	$[-a,4-a]$
برد	$[-3,3]$	$[-3,3]$	$[-1,1]$	$[0,2]$

دامنه‌ها برابر $\Rightarrow \begin{cases} -a=-2 \\ 4-a=2 \end{cases} \Rightarrow a=2$

بردها برابر $\Rightarrow \begin{cases} -1+b=0 \\ 1+b=2 \end{cases} \Rightarrow b=1$

$\Rightarrow a+b=3$

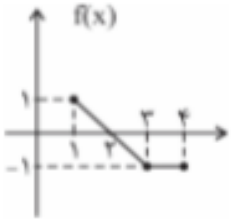
۲۲ - نمودار تابع f به‌صورت مقابل است. مساحت بین $f(x)$ و قرینه تابع $f(5+x)$ نسبت به مبدأ، چقدر است؟

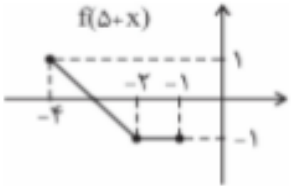


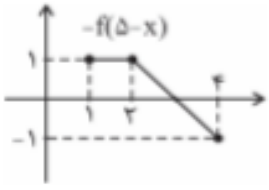
۱) ۴
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۶

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳- صفحه ۱۵ تا ۲۳ - ریاضی ۱- صفحه ۱۱۱ تا ۱۱۶- متوسط)

نکته: قرینه تابع $f(x)$ نسبت به مبدأ برابر $-f(-x)$ است.







$S = a \cdot h = ۱ \times ۲ = ۲$

۲۳ - با فرض $f(x) = ۲ + \sqrt{x-۳}$، کدام تابع در دامنه‌ی تعریف خودش اکیداً صعودی است؟

۱) $f(\frac{۱}{x})$ ۲) $۲ - f(-\frac{۱}{x})$ ۳) $f(۳ - \frac{۱}{x})$ ۴) $\frac{۲}{f(x)}$

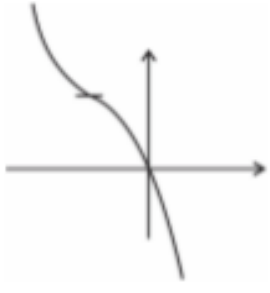
پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳- صفحه ۶ تا ۱۰- متوسط)

نکته: اگر f و g اکیداً صعودی و یا هر دو صعودی و یا هر دو اکیداً نزولی باشند آنگاه fog اکیداً صعودی است.

با فرض $x < ۰$ تابع $۳ - \frac{۱}{x}$ اکیداً صعودی و تابع f نیز در دامنه خود $(x \geq ۳)$ اکیداً صعودی است پس $f\left(۳ - \frac{۱}{x}\right)$ اکیداً صعودی است.

سه گزینه دیگر اکیداً نزولی‌اند.

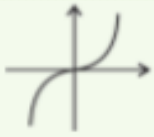
۲۴ - هرگاه نمودار تابع $f(x) = -۴\alpha - (x-\alpha)^۳$ شکل روبه‌رو باشد، نمودار تابع $g(x) = (x+۲\alpha)^۳ + k$ از ناحیه چهارم عبور نمی‌کند، حداقل k کدام است؟



۱) ۳۲
۲) ۱۶
۳) ۶۴
۴) ۲۵۶

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳- صفحه ۲ تا ۵- سخت)

نکته: نمودار تابع $y = x^3$ به‌صورت مقابل است:

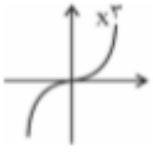


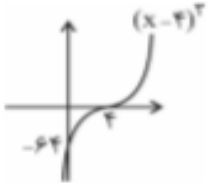
نمودار تابع f از انتقال نمودار $y = x^3$ به چپ به‌دست آمد است پس $\alpha < 0$ است.

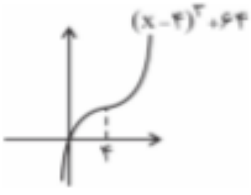
$$f(0) = 0 \Rightarrow -4\alpha - (0-\alpha)^3 = 0 \Rightarrow \alpha^3 = 4\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha = 0, 2, -2 \xrightarrow{\alpha<0} \alpha = -2$$

حال نمودار $g(x) = (x-4)^3 + k$ را رسم می‌کنیم.







پس $k \geq 64$ است.

۲۵ - اگر نمودار $f(x) = (x+a)^2 - 6x - b$ در نقطه‌ای به طول ۲- بر محور x ها مماس باشد، حداکثر مقدار $q(x) = ax - f(x)$ چه عددی است؟

۱) ۳/۷۵- ۲) ۳/۲۵- ۳) ۲/۷۵- ۴) ۲/۲۵-

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲- فصل ۱- صفحه ۱۴- متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

سهمی‌های مماس بر محور x ها:

اگر سهمی $y = ax^2 + bx + c$ در نقطه $x = \alpha$ بر محور x ها مماس باشد روابط زیر برقرار است:

۱) $\Delta = 0$

۲) $y = a(x-\alpha)^2$

در حالت کلی سهمی $y = f(x)$ به شرطی بر خط $y = k$ مماس است که در معادلهٔ حاصل از تقاطع آنها یعنی $f(x) = k$، $\Delta = 0$ باشد.

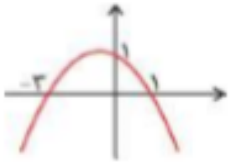
چون سهمی موردنظر در نقطه‌ای به طول ۲- بر محور x ها مماس می‌باشد، بنابراین معادله آن باید به صورت $y = a(x+2)^2$ باشد و از طرفی چون معادله مرتب شده نمودار به صورت $f(x) = x^2 + (2a-6)x + a^2 - b$ است و ضریب x^2 در آن ۱ می‌باشد، بنابراین در معادله $y = a(x+2)^2$، ضریب a برابر ۱ است.

$$f(x) = x^2 + (2a-6)x + a^2 - b = (x+2)^2 \Rightarrow \begin{cases} 2a - 6 = 4 \Rightarrow a = 5 \\ a^2 - b = 4 \Rightarrow b = 21 \end{cases}$$

$$y = ax - f(x) = ax - (x+2)^2 = -x^2 + x - 4$$

$$\max = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{1-16}{4(-1)} = \frac{-15}{4} = -3/75$$

۲۶ - نمودار سهمی f به‌صورت مقابل است. دامنه تابع $y = \sqrt{x^2 + 3f(x)}$ کدام است؟



۱) $\left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$ ۲) $\left(-\infty, \frac{3}{4}\right]$

۳) $\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ۴) $\left[-1, \frac{1}{3}\right]$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱- فصل ۴- صفحه ۷۸ تا ۸۲/ ریاضی ۲- فصل ۱- صفحه ۱۵ تا ۱۸- متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

معادله سهمی:

اگر α, β صفرهای سهمی f باشند آنگاه معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

$$f(x) = a(x-\alpha)(x-\beta)$$

تعیین علامت:

اگر مجموعه جواب نامعادلهٔ $ax^2+bx+c>0$ به‌صورت $(-\infty, \alpha)$ یا $(\alpha, +\infty)$ باشد آنگاه $a=0$ و α ریشهٔ $bx+c=0$ است.

$x=-3$, $x=1$ صفرهای سهمی می‌باشند، بنابراین معادله سهمی به‌صورت $f(x)=a(x+3)(x-1)$ است.

از طرفی: $f(0)=1 \Rightarrow -3a=1 \Rightarrow a=-\frac{1}{3}$

$$\Rightarrow f(x)=-\frac{1}{3}(x+3)(x-1)=-\frac{1}{3}x^2-\frac{2}{3}x+1$$

حال دامنه تابع را پیدا می‌کنیم:

$$x^2+3f(x)\geq 0 \Rightarrow x^2-x^2-2x+3\geq 0 \Rightarrow x\leq \frac{3}{2}$$

۲۷ - هرگاه f تابعی خطی باشد به‌طوریکه برای تمام مقادیر حقیقی x رابطهٔ $f(2x-3)-3f(1)=3x+6$ برقرار باشد، تابع f، تابع معکوس خودش را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲- فصل ۳- صفحه ۶۱ تا ۶۴/ ریاضی ۳- فصل ۱- صفحه ۲۴ تا ۲۹- متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

در توابع اکیداً صعودی، نقطه برخورد f و f^{-1} روی خط $y=x$ است. بنابراین برای یافتن نقطه برخورد f و f^{-1}، معادلهٔ $f(x)=x$ را حل می‌کنیم.

f تابعی خطی است، بنابراین: $f(x)=ax+b$

$$\Rightarrow a(2x-3)+b-3(a+b)=3x+6$$

$$\Rightarrow 2ax-6a-2b=3x+6 \Rightarrow \begin{cases} 2a=3 \\ -6a-2b=6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{3}{2} \\ b=-\frac{15}{2} \end{cases}$$

پس $f(x)=\frac{3}{2}x-\frac{15}{2}$ است و برای یافتن نقطه برخورد f با f^{-1}، کافی است f را با $y=x$ قطع دهیم:

$$f(x)=x \Rightarrow \frac{3}{2}x-\frac{15}{2}=x \Rightarrow x=15$$

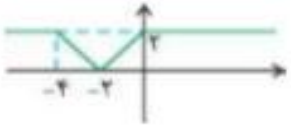
سؤالات منتخب

نقطه برخورد $f(x)=\frac{4x-3}{3x-2}$ با وارون آن، روی کدام خط زیر واقع است؟

۱) $y=3x-2$ ✓ ۲) $y=x-1$ ۳) $y=2x+1$ ۴) $y=x+1$

www.biomaze.ir

۲۸ - اگر نمودار $y=f(x)$ شکل مقابل باشد، کدام تابع ثابت نمی‌باشد؟



۱) $y=f(|x|)$ ۲) $y=f(x+|x|)$

۳) $y=f(|x-2|)$ ۴) $y=f(|x|-2)$

www.mapedu.ir

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۱- فصل ۵- صفحه ۱۱۰ تا ۱۱۴- متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

تابعی که برد آن تک عضوی باشد، تابع ثابت است. تابع ثابت با دامنه $\mathbb{R}$ به‌صورت $y=k$ است.

روش اول:

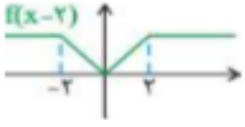
گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

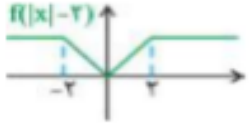
۱) $y=f(|x|)=\begin{cases} f(x) & x\geq 0 \\ f(-x) & x<0 \end{cases}=\begin{cases} 2 & x\geq 0 \\ 2 & x<0 \end{cases}$ ثابت

۲) $y=f(x+|x|)=\begin{cases} f(2x) & x\geq 0 \\ f(0) & x<0 \end{cases}=\begin{cases} 2 & x\geq 0 \\ 2 & x<0 \end{cases}$ ثابت

۳) $y=f(|x-2|)\xrightarrow{|x-2|\geq 0} y=f(0)=2$ ثابت

۴) $y=f(|x|-2)=\begin{cases} f(x-2) & x\geq 0 \\ f(-x-2) & x<0 \end{cases}=\begin{cases} f(t) & t\geq -2 \\ f(t) & t<-2 \end{cases}$ تابع ثابت نیست، نمودار گزینه ۴ به‌صورت زیر است.





روش دوم: در گزینه‌های ۱، ۲ و ۳ ورودی تابع همواره نامنفی است و چون برای هر $\alpha\geq 0$ تابع $f(x)$ با مقدار ثابت ۲ برابر است پس هر سه گزینه ۱ و ۲ و ۳ ثابت است.

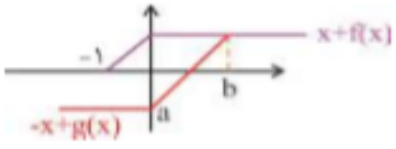
سؤالات منتخب

تابع $f(x)=a\sqrt{4x^2-4x+1}+b\sqrt{9x^2+18x+9}$ در بازه $\left[-1,\frac{1}{2}\right]$ با تابع ثابت $y=9$ برابر است. $f(5)$ کدام است؟

۱) ۶۳ ✓ ۲) ۵۶ ۳) ۵۴ ۴) ۴۵

گروه آموزشی ماز

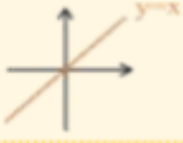
۲۹- نمودار توابع $x+f(x)$ و $-x+g(x)$ به‌صورت مقابل است. اگر تابع $(f+g)(x)$ همانی باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۱- فصل ۵- صفحه ۱۱۰/ ریاضی ۲- فصل ۳- صفحه ۶۵- متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!



تابع $f(x)=x$ را همانی می‌نامیم. تابع همانی ورودی و خروجی برابر دارد. مانند:

$f=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$

فرض کنید $h_1=x+f(x)$ و $h_2=-x+g(x)$

تابع $h_1+h_2=f+g$ همانی است پس $(h_1+h_2)(x)=x$ است.

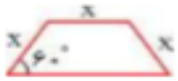
$x=-1\Rightarrow(h_1+h_2)(-1)=-1\Rightarrow 0+a=-1\Rightarrow a=-1$

$x=0\Rightarrow(h_1+h_2)(0)=0\Rightarrow h_1(0)+a=0\Rightarrow h_1(0)=1$

$x=b\Rightarrow(h_1+h_2)(b)=b\Rightarrow 2h_1(0)=b\Rightarrow b=2$

پس $a+b=1$ است.

۳۰ - مساحت ذوزنقه متساوی‌الساقین شکل مقابل به‌صورت تابعی از x بیان شده است. ضابطه این تابع کدام است؟

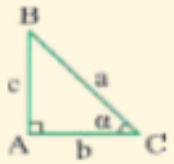


۱) $\frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$

۳) $\frac{3\sqrt{3}}{4}x^2$ ۴) $\frac{\sqrt{3}}{2}x^2$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱- فصل ۵- صفحه ۱۰۹ و ۱۱۶- متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

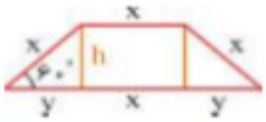


در مثلث قائم‌الزاویه ABC ، نسبت‌های مثلثاتی زاویه α به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$\cos\alpha = \frac{b}{a}$ $\sin\alpha = \frac{c}{a}$

$\cot\alpha = \frac{b}{c}$ $\tan\alpha = \frac{c}{b}$

ارتفاع ذوزنقه را رسم می‌کنیم.



$$\begin{cases} h = x\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}x \\ y = x\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}x \end{cases}$$

$$S = \frac{h}{2}(x + x + 2y) = \frac{\sqrt{3}}{4}x(3x + x) = \frac{3\sqrt{3}}{4}x^2$$

۳۱ - اگر $f(x) = \frac{x}{x-3}$ و $g = \{(1,1),(2,0),(3,-2),(4,-1)\}$ جمع اعضای برد تابع $fo(f-g)$ کدام است؟

۱) $\frac{97}{30}$ ۲) $\frac{67}{30}$ ۳) $\frac{97}{15}$ ۴) $\frac{67}{15}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲- فصل ۳- صفحه ۶۷/ ریاضی ۳- فصل ۱- صفحه ۱۳ و ۱۴- ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

اگر دامنه توابع f ، g به‌ترتیب به صورت D_f و D_g باشد:

$D_{f\times g} = D_{f\pm g} = D_f \cap D_g$

$D_{fog} = \{x \in D_g : g(x) \in D_f\}$

$D_{f-g} = D_f \cap D_g = \{1,2,4\}$

$x = 1 \Rightarrow fo(f-g)(1) = f\left(-\frac{1}{2} - 1\right) = f\left(-\frac{3}{2}\right) = \frac{-\frac{3}{2}}{-\frac{9}{2}} = \frac{1}{3}$

$x = 2 \Rightarrow fo(f-g)(2) = f(-2 - -) = f(-2) = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5}$

$x = 4 \Rightarrow fo(f-g)(4) = f(4+1) = f(5) = \frac{5}{2}$

پس برد تابع، مجموعه $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{5}{2}\right\}$ است که مجموع اعضای آن برابر $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{5}{2} = \frac{97}{30}$ است.

۳۲ - هرگاه $f(x)=\frac{2x-1}{x+1}$ و $fog(x)=\frac{2}{x+2}$ باشد، ضابطهٔ تابع $y=g^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{x-2}{2x+1}$ ۲) $\frac{2x+4}{2x-1}$ ۳) $\frac{4-2x}{2x-1}$ ۴) $\frac{2-x}{2x+1}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳- فصل ۱- صفحه ۲۶- متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

در تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ اگر $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$ باشد آنگاه: $f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$

توجه: در تابع $f(x)$، اگر $a+d=0$ باشد، داریم: $f^{-1}(x)=f(x)$

روش اول:

$$fog(x)=\frac{2}{x+2}\Rightarrow\frac{2g-1}{g+1}=\frac{2}{x+2}$$

$$\Rightarrow 2(x+2)g-x-2=2g+2\Rightarrow(2x+2)g=x+4\Rightarrow g(x)=\frac{x+4}{2x+2}$$

محاسبه وارون: $x=\frac{y+4}{2y+2}\Rightarrow 2xy+2x=y+4\Rightarrow y=g^{-1}(x)=\frac{4-2x}{2x-1}$

روش دوم: از سمت راست از دو طرف فرض، g^{-1} می‌گیریم. فرض کنید $g^{-1}(x)=t$:

$$fog(x)=\frac{2}{x+2}\Rightarrow fogog^{-1}(x)=\left(\frac{2}{x+2}\right)\left(g^{-1}(x)\right)$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{2}{t+2}\Rightarrow\frac{2x-1}{x+1}=\frac{2}{t+2}\Rightarrow\frac{x+1}{2x-1}=\frac{t+2}{2}\Rightarrow t=\frac{4-2x}{2x-1}$$

سؤالات منتخب

با کدام شرط زیر تابع $f(x)=\frac{x+3}{x-a+2}$ بر وارون خود منطبق است؟

۱) $a=2$ ۲) $a=\frac{2}{3}$ ۳) $a=3$ ✓ ۴) $a=-\frac{2}{3}$

گروه آموزشی ماز

۳۳ - اگر $f=\{(2,a),(b^2-b,a),(b,b),(3,-1)\}$ تابعی یک به یک باشد، کدام تابع زیر یک به یک است؟

۱) $[x]-ax$ ۲) $ax+[x]$ ۳) $bx-[x]$ ۴) $bx+[-x]$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲- فصل ۳- صفحه ۵۹ و ۶۰- متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

در تابع f اگر هیچ دو زوج مرتب متمایزی دارای مؤلفه‌های دوم برابر نباشند را یک به یک می‌نامیم.

$f(a)=f(b)\Rightarrow a=b$

در دو زوج مرتب اول، مؤلفه دوم برابر a است، پس:

$b^2-b=2\Rightarrow b=-1,2$

به‌ازای $b=-1$ زوج مرتب‌های سوم و چهارم دارای مؤلفه دوم برابر می‌شوند پس $b=2$، قابل قبول است.

$$\begin{cases}f(2)=a\\f(2)=2\end{cases}\Rightarrow a=2$$

به‌ازای $a=2$ تابع $2x$ اکیداً صعودی و چون $[x]$ صعودی است پس $2x+[x]$ اکیداً صعودی و در نتیجه یک به یک است.

سؤالات منتخب

کدام تابع زیر یک به یک است؟

۱) $y=2x-3|x|$ ۲) $y=x+|2x-1|$ ۳) $y=2x-|x-1|$ ✓ ۴) $y=x-|2x+1|$

۳۴- تابع $f(x)=(2m-5)x-3mx+1$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ وارون‌پذیر است. حدود m کدام است؟

۱) $m>\frac{5}{2}$ یا $m<-\frac{1}{3}$ ۲) $m>1$ یا $m<-5$ ۳) $-\frac{1}{3}<m<\frac{5}{2}$ ۴) $-5<m<1$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳- فصل ۱- صفحه ۲۷ تا ۲۹- متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

اگر تابع f پیوسته باشد، آنگاه شرط یک به یک بودن آن است که f اکیداً یکنوا باشد و برعکس.

با توجه به پیوسته بودن f، شرط یک به یک بودن آن است که اکیداً یکنوا باشد. برای قدرمطلق دو ضابطه در نظر می‌گیریم:

$$f(x)=\begin{cases}(2m-5)x-3mx-1=(-m-5)x-1\\(2m-5)x+3mx+1=(5m-5)x+1\end{cases}$$

شیب نیم خط‌های به‌دست آمده یا باید هر دو مثبت باشند و یا هر دو منفی. پس حاصل‌ضرب آن دو مثبت است.

$$m_1m_2>0\Rightarrow(-m-5)(5m-5)>0\Rightarrow-5<m<1$$

سؤالات منتخب

تابع $y=ax^2+(a-5)x$ در بازهٔ $[2,+\infty)$ یک به یک است. حدود a کدام است؟

۱) $0<a\le1$ ۲) $\mathbb{R}-[0,1)$ ✓ ۳) $-1\le a<0$ ۴) $\mathbb{R}-[-1,0)$

گروه آموزشی ماز

۳۵- تابع $f(x)=x^2-4x$ با دامنه $(-\infty,2)$ و تابع $g(x)=1+\frac{2}{x}$ با دامنه $\mathbb{R}-\{0\}$ مفروض‌اند. دامنه تابع $y=f^{-1}og(x)$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-\left[-\frac{2}{3},0\right]$ ۲) $\mathbb{R}-\left[-\frac{2}{5},0\right]$ ۳) $\left(-\frac{2}{5},0\right)$ ۴) $\left(-\frac{2}{3},0\right)$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳- فصل ۱- صفحه ۱۳، ۱۴ و ۲۵- متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

وارون تابع:

اگر $g=f(x)$ یک به یک باشد، برای یافتن تابع f^{-1} کافی است جای x و y را عوض کنیم. دقت کنید در این حالت جای دامنه و برد عوض می‌شود، یعنی:

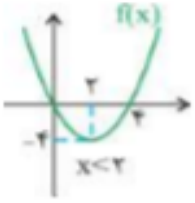
$$\begin{cases}D_f=R_{f^{-1}}\\R_f=D_{f^{-1}}\end{cases}$$

دامنه fog:

برای یافتن دامنه fog از رابطه زیر استفاده می‌کنیم.

$$D_{fog}=\{x\in D_g:g(x)\in D_f\}$$

با توجه به نمودار $f(x)$، برد تابع f که همان دامنهٔ f^{-1} است به‌صورت بازهٔ $(-4,+\infty)$ است.



$$D_{f^{-1}og}=\{x\in D_g:g(x)\in D_{f^{-1}}\}=\{x\ne0:1+\frac{2}{x}>-4\}$$

$$=\{x\ne0:\frac{2}{x}+5>0\}=\{x\ne0:\frac{2+5x}{x}>0\}$$

$$=\{x\ne0:x<-\frac{2}{5},x>0\}=\left(-\infty,-\frac{2}{5}\right)\cup(0,+\infty)=\mathbb{R}-\left[-\frac{2}{5},0\right]$$

۳۶ - با فرض $f(x)=2x+\sqrt{x+3}$، جواب نامعادلهٔ $1\le f^{-1}(2x)\le 6$ کدام است؟

۱) $4\le x\le 10$ ۲) $4\le x\le 15$ ۳) $2\le x\le 5$ ۴) $2\le x\le 7/5$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳، فصل ۱، صفحه ۲۴ تا ۲۷، متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

اگر تابع f اکیداً صعودی باشد آنگاه:

$a<b \Leftrightarrow f(a)<f(b)$

یعنی می‌توان از دو طرف نامساوی f گرفت و یا f را خط زد. در ضمن اگر f در بازه (a,b) اکیداً صعودی (نزولی) باشد، f^{-1} در بازه متناظر اکیداً صعودی (نزولی) است.

تابع f اکیداً صعودی است پس مجازیم از طرفین نامعادله، f بگیریم.

$$1\le f^{-1}(2x)\le 6 \Rightarrow f(1)\le fof^{-1}(2x)\le f(6)$$
$$\Rightarrow 4\le 2x\le 15 \Rightarrow 2\le x\le 7/5$$

سؤالات منتخب

اگر $f(x)=x^3+x$ باشد، دامنه تابع $y=\sqrt{2f^{-1}(x)-x}$ کدام است؟

۱) $[-2,0]\cup[2,+\infty)$ ۲) $[-2,0]$ ۳) $(-\infty,-2]\cup[0,2]$ ✓ ۴) $[0,2]$

گروه آموزشی ماز

۳۷ - تابع $f(x)=\frac{3x+a}{x-1}$ وارون خودش را در نقطه‌ای روی خط $y=2x-5$ قطع می‌کند. مقدار a چه عددی است؟

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳، فصل ۱، صفحه ۲۶ تا ۲۹، ساده)

هر تست ماز یک کلاس درس!

تابع هموگرافیک $y=f(x)$ (اگر بر وارون خود منطبق نباشد)، وارون خود را فقط روی نیمساز $y=x$ می‌تواند قطع کند.

تابع f وارون خود را روی نیمساز ناحیه اول و سوم قطع می‌کند $(f\neq f^{-1})$.

پس نقطه تقاطع خط $y=2x-5$ و $y=x$ نقطه برخورد f با f^{-1} است.

$$2x-5=x \Rightarrow x=5$$

نقطه $A(5,5)$ نقطه برخورد است.

$$f(5)=5 \Rightarrow \frac{15+a}{4}=5 \Rightarrow a=5$$

سؤالات منتخب

تابع $y=\frac{3x+a}{x-5}$ وارون خود را فقط در یک نقطه قطع می‌کند. a کدام است؟

۱) -64 ۲) 64 ۳) -16 ✓ ۴) 16

www.biomaze.ir

۳۸ - تابع $f(x)=\frac{2x+3}{x-2}$ مفروض است. به‌ازای کدام مقدار α تساوی $f(6+f(\alpha))=f^{-1}(\alpha)$ برقرار است؟

۱) ۱ یا ۶ ۲) ۱ یا ۹ ۳) ۳ یا ۶ ۴) ۳ یا ۹

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳، فصل ۱، صفحه ۲۴ تا ۲۹، متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

فرض کنید $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ و $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$ در این صورت:

$$f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$$

در حالت خاص اگر $a=-d$ باشد آنگاه $f=f^{-1}$ است.

در ضمن اگر f یک به یک و $f(a)=f(b)$ باشد آنگاه $a=b$ است.

www.mapedu.ir

در تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ چون $a=-d$ پس $f=f^{-1}$ است.

$$f(6+f(\alpha))=f^{-1}(\alpha)=f(\alpha)$$

$$\Rightarrow 6+f(\alpha)=\alpha \Rightarrow 6+\frac{2\alpha+3}{\alpha-2}=\alpha \Rightarrow \frac{2\alpha+3}{\alpha-2}=\alpha-6$$

$$\Rightarrow 2\alpha+3=\alpha^2-8\alpha+12 \Rightarrow \alpha^2-10\alpha+9=0$$

$$\Rightarrow \alpha=1 \text{ یا } 9$$

۳۹ - با فرض $f(x)=3x+2\sqrt{x-1}-4$. نمودار تابع $y=f^{-1}(x)$ خط $y=\frac{x}{3}$ را در نقطه‌ای به طول α قطع می‌کند. حاصل $f^{-1}(2\alpha+2)$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۷ ۳) ۱۰ ۴) ۲۵

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳، فصل ۱، صفحه ۲۴ تا ۲۹، متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

اگر f^{-1} وارون f باشد آنگاه:

$$f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$$

در واقع اگر $A(a,b)$ نقطه‌ای روی f باشد آنگاه $A'(b,a)$ روی f^{-1} است.

دو تابع را برابر هم قرار می‌دهیم.

$$f^{-1}(x)=\frac{x}{3} \Rightarrow x=f\left(\frac{x}{3}\right) \Rightarrow x=x+2\sqrt{\frac{x}{3}-1}-4$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{x}{3}-1}=2 \Rightarrow \frac{x}{3}-1=4 \Rightarrow x=15 \Rightarrow 2\alpha+2=32$$

حال فرض کنید $f^{-1}(32)=t$ پس $f(t)=32$.

برای محاسبه t می‌توان گزینه‌ها را بررسی نمود و یا به روش زیر عمل کرد:

$$3t+2\sqrt{t-1}-4=32 \Rightarrow 2\sqrt{t-1}=36-3t \xrightarrow{t\le 12} 4(t-1)=9(144+t^2-24t)$$

$$\Rightarrow 9t^2-22t+13=0 \Rightarrow (t-1)(9t-13)=0 \xrightarrow{t\le 12} t=1$$

سؤالات منتخب

وارون تابع $f(x)=x^2-2x$ ، $x\le 1$ خط $y=\frac{9-x}{2}$ را در نقطه‌ای با کدام طول قطع می‌کند؟

۱) -1 ۲) -3 ۳) ۱۲ ۴) ۱۵ ✓

www.biomaze.ir

۴۰ - با فرض $f(x)=\frac{1}{3-x}$. هرگاه $f^{-1}(x)-f(x+k)$ تابعی ثابت باشد، k چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۳ ۴) -3

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳، فصل ۱، صفحه ۲۷ تا ۲۹، سخت)

هر تست ماز یک کلاس درس!

تابع وارون:

برای محاسبه وارون یک تابع، جای x و y را عوض می‌کنیم.

در حالت خاص، وارون تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ به‌صورت $f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$ است.

ابتدا وارون تابع f را به‌دست می‌آوریم:

$$y=\frac{1}{3-x} \xrightarrow{\text{وارون}} x=\frac{1}{3-y} \Rightarrow 3-y=\frac{1}{x} \Rightarrow y=3-\frac{1}{x} \Rightarrow f^{-1}(x)=3-\frac{1}{x}$$

$$y=f^{-1}(x)-f(x+k)=3-\frac{1}{x}-\frac{1}{3-x-k}=3-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-3+k}$$

به شرطی این تابع ثابت است که $\frac{1}{x}=\frac{1}{x-3+k}$ باشد، پس $-3+k=0$ و $k=3$ است.

۴۱ - هرگاه $f(x)=\frac{3}{2x-1}$ باشد، به طوری که $f^{-1}(x-a)=f(x)+b$، مقدار $a+b$ چه عددی است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) صفر ۴) ۲-

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی۳- صفحه ۲۴ تا ۲۹ - متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

اگر: $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d} \xrightarrow{\frac{a}{c}=\frac{b}{d}} f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$

در واقع وارون هموگرافیک، یک تابع هموگرافیک خواهد بود.

در حالت خاص اگر در تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ شرط $a+d=0$ برقرار باشد، آن‌گاه $f(x)=f^{-1}(x)$

ابتدا ضابطه f^{-1} را بدست می‌آوریم.

$$f(x)=\frac{3}{2x-1}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+3}{2x}=\frac{1}{2}+\frac{3}{2x}$$

اگر در تابع $f^{-1}(x)$، به جای x مقدار $x=-\frac{1}{2}$ را قرار دهیم آن‌گاه به ضابطه $f(x)$ نزدیک‌تر می‌شویم:

$$f^{-1}(x)=\frac{1}{2}+\frac{3}{2x}\Rightarrow f^{-1}(x-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+\frac{3}{2(x-\frac{1}{2})}$$

$$f^{-1}(x-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{3}{2x-1}}_{f(x)}\Rightarrow f^{-1}(x-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}+f(x)$$

$$\Rightarrow a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1}{2}\Rightarrow a+b=1$$

سؤالات منتخب

اگر تابع $y=\frac{5x+m}{x+3m+4}$ وارون خود را در بی‌شمار نقطه قطع کند، m کدام است؟

۱) ۳ ۲) ۴- ۳) ۳- ✓ ۴) ۴

گروه آموزشی ماز

۴۲- هرگاه $f(x)=2x+3|x-1|$ و $g(x)=\sqrt{2x-x^2}$ باشد، دامنهٔ تعریف تابع $gof(x)$ کدام است؟

۱) $\{1\}$ ۲) $[1,3]$ ۳) $[\frac{3}{5},2]$ ۴) $[\frac{3}{5},1]$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی۳- صفحه ۲۲ - متوسط)

هرتست ماز یک کلاس درس!

برای یافتن دامنه gof می‌توانیم از تعریف: $D_{gof}=\{x\in D_f, f(x)\in D_g\}$ استفاده کنیم و یا آنکه ضابطه gof را تشکیل داده و دامنه تعریف آن را بدست آوریم به شرطی که دقت کنیم تمام شرایط را در نظر بگیریم.

$D_{gof}=\{x\in D_f, f(x)\in D_g\}$

$D_f=\mathbb{R}$ $\quad x\in D_f: x\in\mathbb{R}$

$D_g=[0,2]$ $\quad f(x)\in D_g\Rightarrow 0\le 2x+3|x-1|\le 2$

$$\begin{cases} x\ge 1: 0\le 5x-3\le 2\Rightarrow \frac{3}{5}\le x\le 1\Rightarrow x=1 \\ x\le 1: 0\le -x+3\le 2\Rightarrow -3\le x-3\le -1\Rightarrow 1\le x\le 3\Rightarrow x=1 \end{cases}$$

پس: $D_{gof}=\{1\}$

سؤالات منتخب

اگر $f(x)=\sqrt{4x-12}$ باشد، دامنه $y=fof(2x)$ کدام است؟

۱) $[\frac{21}{4},+\infty)$ ۲) $[\frac{21}{8},+\infty)$ ✓ ۳) $[\frac{3}{2},+\infty)$ ۴) $[\frac{12}{8},\frac{21}{8}]$

www.biomaze.ir

۴۳- هرگاه $f(x)=\frac{x}{2x+1}$ باشد، به طوری که $(\frac{1}{f}of)(x)=fog(x)$، ضابطهٔ $g^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{4x-1}{2+7x}$ ۲) $\frac{1-4x}{7x+2}$ ۳) $\frac{2x+1}{7x+4}$ ۴) $\frac{-2x-1}{7x+4}$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی۳- صفحه ۲۴ تا ۲۹- دشوار)

$$f(x)=\frac{x}{2x+1}\Rightarrow\frac{1}{f(x)}=\frac{2x+1}{x}=2+\frac{1}{x}$$

$$(\frac{1}{f}of)(x)=(2+\frac{1}{x})of(x)=2+\frac{1}{f(x)}=2+\frac{2x+1}{x}=4+\frac{1}{x}$$

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{g(x)}{2g(x)+1}$$

$$\Rightarrow(\frac{1}{f}of)(x)=fog(x)\Rightarrow 4+\frac{1}{x}=\frac{g(x)}{2g(x)+1}$$

$$\Rightarrow\frac{4x+1}{x}=\frac{g(x)}{2g(x)+1}\Rightarrow xg(x)=8xg(x)+4x+2g(x)+1$$

$$7xg(x)+2g(x)=-1-4x\Rightarrow g(x)=\frac{-4x-1}{7x+2}\Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{-2x-1}{7x+4}$$

نکته ۱: تابع $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ را هموگرافیک می‌نامیم که با شرط $\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d}$، تابعی یک به یک و درنتیجه وارون پذیر خواهد بود و در این صورت ضابطه وارون آن، خود، یک تابع هموگرافیک است که $f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$

نکته ۲: ترکیب توابع خاصیت جابه‌جایی ندارد. (به عبارت دیگر، لزوما $fog(x)=gof(x)$ برقرار نمی‌باشد.)

سؤالات منتخب

هرگاه $f(x)=\frac{x}{x+3}$ باشد، ضابطه تابع $(\frac{1}{f}of^{-1})(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{x}$ ۲) $\frac{-1}{x}$ ۳) $-\frac{3}{x}$ ۴) $\frac{1}{x}$ ✓

گروه آموزشی ماز

۴۴- هرگاه $f(2x)-f^{-1}(2)=6x+1$ باشد، ضابطه وارون تابع $y=4f(3x)$ کدام است؟

۱) $y=\frac{1}{36}(x+5)$ ۲) $y=\frac{1}{9}(x+5)$ ۳) $y=\frac{1}{9}(x-5)$ ۴) $y=\frac{1}{36}(x-5)$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی۲- صفحه ۶۱ تا ۶۴ - متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

برای یافتن ضابطه وارون یک تابع خطی غیرثابت داریم:

اگر $f(x)=ax+b\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-b}{a}$

برای یافتن وارون $y=f(x)$ ابتدا x را برحسب y یافته و سپس جای x و y را عوض می‌کنیم، ضابطه بدست آمده وارون تابع است.

فرض می‌کنیم $f^{-1}(2)=\alpha$ آن‌گاه $f(\alpha)=2$ حال اگر در تساوی داده شده به جای x مقدار $\frac{\alpha}{2}$ قرار دهیم، آن‌گاه:

$$f(\alpha)-\alpha=6(\frac{\alpha}{2})+1$$

$$\Rightarrow f(\alpha)=4\alpha+1 \Rightarrow 2=4\alpha+1 \Rightarrow \alpha=\frac{1}{4}$$

می‌دانیم $f^{-1}(2)=\alpha=\frac{1}{4}$ پس:

$$\Rightarrow f(3x)=6x+\frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad f(x)=3x+\frac{5}{4}$$

$$y=4f(3x)=4(9x+\frac{5}{4})=36x+5 \rightarrow y=36x+5$$

$$x=\frac{y-5}{36} \xrightarrow{\text{تعویض جای } y,x} y=\frac{x-5}{36}$$

سؤالات منتخب

اگر f تابعی یک‌به‌یک باشد و $g(x)=3+4f(1-\frac{x}{2})$، ضابطهٔ $g^{-1}(x)$ برحسب $f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) $g^{-1}(x)=\frac{f^{-1}(2-3x)-3}{4}$

۲) $g^{-1}(x)=2+2f^{-1}(\frac{x-4}{3})$

۳) $g^{-1}(x)=2-3f^{-1}(\frac{x-3}{4})$ ✓

۴) $g^{-1}(x)=2f^{-1}(\frac{x-4}{3})-3$

www.biomaze.ir

۴۵ - نمودار تابع $f(x)=x^3+\sqrt{x-1}$ را نسبت به خط $y=x$ قرینه کرده و نمودار بدست آمده را k واحد به سمت چپ انتقال می‌دهیم اگر نمودار حاصل نمودار تابع $y=f(x)$ را در نقطه‌ای به طول $x=2$ قطع کند، مقدار k کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۲۳ ۳) ۲۵ ۴) ۲۹

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳- صفحه ۲۴ تا ۲۹- متوسط)

اولاً دقت کنید $\sqrt{x-1}$ تابعی اکیداً صعودی است و $y=x^3$ برای $x>0$ اکیداً صعودی است پس در کل تابع $y=x^3+\sqrt{x-1}$ در بازه $[1,+\infty)$ اکیداً صعودی و در نتیجه وارون‌پذیر خواهد بود. بعد از آنکه f را نسبت به خط $y=x$ قرینه می‌کنیم نمودار حاصل $f^{-1}(x)$ است و اگر آن را k واحد به سمت چپ انتقال دهیم، تابع $f^{-1}(x+k)$ بدست می‌آید.

قرینه یک تابع نسبت به خط $y=x$ یعنی وارون تابع، و بعد از آن که وارون تابع را به‌دست آوردیم باید آن را k واحد به چپ انتقال دهیم یعنی $y=f^{-1}(x+k)$

پس در واقع:

$$f^{-1}(x+k)=f(x) \xrightarrow{x=2} f^{-1}(2+k)=f(2)$$

$$f^{-1}(2+k)=4+1=5 \Rightarrow f(5)=2+k$$

$$\Rightarrow 25+2=2+k \Rightarrow k=25$$

سؤالات منتخب

نمودار تابع $y=\sqrt{4+x}$ را نسبت به خط $x=-1$ قرینه کرده‌ایم. آن را چند واحد به چپ انتقال دهیم تا نمودار حاصل، تابع اولیه را قطع نکند؟

۱) کم‌تر از ۴ واحد ۲) کم‌تر از ۲ واحد ۳) بیش از ۶ واحد ✓ ۴) همواره قطع می‌کند.

گروه آموزشی ماز

۴۶ - هرگاه تابع $f(x)=3x+\sqrt{x+2}$ با برد $[-2,8]$ باشد، نقطه میانی دامنه تعریف آن کدام است؟

۱) $-\frac{3}{2}$ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{3}{2}$

www.mapedu.ir

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی۳- صفحه ۶ تا ۱۰- متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

اگر f تابعی صعودی اکید و پیوسته باشد: $D_f=[\alpha,\beta]\Rightarrow R_f=[f(\alpha),f(\beta)]$

و اگر f تابعی نزولی اکید و پیوسته باشد: $D_f=[\alpha,\beta]\Rightarrow R_f=[f(\beta),f(\alpha)]$

چون توابع $y_1=\sqrt{x+2}$ و $y_2=3x$ اکیدا صعودی هستند، بنابراین تابع $y=3x+\sqrt{x+2}$ نیز اکیدا صعودی خواهد بود، پس:

$$D_f=[\alpha,\beta]\Rightarrow R_f=[f(\alpha),f(\beta)]$$

$$f(\alpha)=-2\Rightarrow +3\alpha+\sqrt{\alpha+2}=-2\Rightarrow \sqrt{\alpha+2}=-3\alpha-2$$

$$9\alpha^2+4+12\alpha-\alpha-2=0\Rightarrow 9\alpha^2+11\alpha+2=0\begin{cases}\alpha=-1\\ \alpha=-\frac{2}{9}\ \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

$$f(\beta)=8\Rightarrow 3\beta+\sqrt{\beta+2}=8\Rightarrow -3\beta+8=\sqrt{\beta+2}$$

$$9\beta^2+64-48\beta=\beta+2\Rightarrow 9\beta^2-49\beta+62=0$$

$$(\beta-2)(9\beta-31)=0\Rightarrow\begin{cases}\beta=2\ \checkmark\\ \beta=\frac{31}{9}\ \text{غ‌ق‌ق}\end{cases}$$

$$D_f=[-1,2]\Rightarrow \text{نقطه میانی}=\frac{2-1}{2}=\frac{1}{2}$$

سؤالات منتخب

اگر $f(x)=3x+\sqrt{x+5}$ و $-4\le f^{-1}(x)\le -1$ باشد، حدود f کدام است؟

۱) $[1,11]$ ۲) $[-11,-1]$ ✓ ۳) $[-11,1]$ ۴) $[-1,11]$

www.biomaze.ir

۴۷ - هرگاه $f(x)=\sqrt{4-x}$ و $g(x)=fof(x)$ باشد، نمودار $y=gog^{-1}(x)+g^{-1}og(x)$ یک پاره‌خط به طول d است. مقدار d کدام است؟

۱) $2\sqrt{5}$ ۲) $2\sqrt{2}$ ۳) $4\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{5}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی۳- صفحه ۲۴ تا ۲۹- دشوار)

نکته: اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه:

$$fof^{-1}(x)=x\quad x\in R_f$$
$$f^{-1}of(x)=x\quad x\in D_f$$

یعنی ترکیب هر تابع با وارون خودش، تابع همانی است.

$$y=gog^{-1}(x)+g^{-1}og(x)=2x\qquad x\in D_g, x\in R_g\Rightarrow x\in D_g\cap R_g$$

$$f(x)=\sqrt{4-x}\Rightarrow fof(x)=\sqrt{4-\sqrt{4-x}}$$

$$\begin{cases}4-x\ge 0\Rightarrow x\le 4\\ \sqrt{4-x}\le 4\Rightarrow 4-x\le 16\Rightarrow x\ge -12\end{cases}\Rightarrow D_{g(x)}=[-12,4]$$

از طرفی تابع $g(x)$ تابعی صعودی است، بنابراین: $R_g=[f(-12),f(4)]=[0,2]$

$$D_{fof}=[-12,4]\ ,\ R_{fof}=[0,2]$$

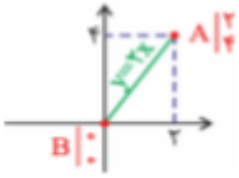
پس $gog^{-1}(x)=x$ که $0\le x\le 2$ و از طرفی $g^{-1}og(x)=x$ که $-12\le x\le 4$

$$y=gog^{-1}(x)+g^{-1}og(x)$$

دامنه تابع y اشتراک دامنه و برد تابع g است، پس: $0 \le x \le 2$

$y = 2x \quad 0 \le x \le 2$

$AB = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$



۴۸ - چه تعداد از روابط زیر بیانگر یک تابع می‌باشد؟

الف) $\sin y = x$ ب) $y(x-1) = 0$ پ) $x^2 + y^2 - 2y + 6x + 10 = 0$ ت) $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x \ge 1 \\ [-x]+1 & , \ x \le 1 \end{cases}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۱- صفحه ۹۵ تا ۱۰۸- متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

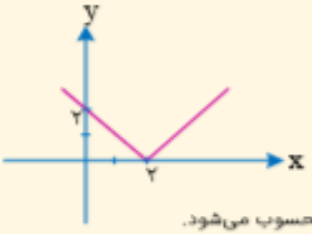
رابطه‌ای می‌تواند تابع باشد که به ازای هر x، دقیقا یک y داشته باشد.

برای بررسی تابع بودن یک رابطه همچنین می‌توانیم از رسم نمودار یا نقطه‌گذاری نیز استفاده کنیم.

مثال: تابع بودن روابط زیر را بررسی کنید.

الف) $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$

$y = \sqrt{x^2 - 4x + 4} = \sqrt{(x-2)^2} = |x-2|$



نمودار فوق نمایش یک تابع است. پس $y = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$، یک تابع محسوب می‌شود.

ب) $|x| + |y| = 5$

با قرار دادن $x = 1$ در رابطه فوق، دو مقدار $y = +4$ و $y = -4$ بدست می‌آید. پس این رابطه تابع نیست.

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

الف) به ازای $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ مقادیر $y = \frac{\pi}{3}$ و $y = \frac{2\pi}{3}$ و... به دست می‌آید، بنابراین این مورد تابع نیست.

ب) به ازای $x = 1$ بی‌شمار مقدار برای y بدست می‌آید. یعنی به ازای $x = 1$، y هر مقداری که اختیار کند، حاصل $y(x-1)$ برابر صفر خواهد بود، پس این مورد نمی‌تواند بیانگر یک تابع باشد.

پ)

$x^2 + y^2 - 2y + 6x + 10 = 0 \Rightarrow (x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) = 0$

$(x+3)^2 + (y-1)^2 = 0$

چون جمع دو عبارت نامنفی برابر صفر است، پس هر یک از پرانتزها به تنهایی برابر صفر هستند. یعنی $x = -3$ و $y = 1$ است و این تابع فقط شامل یک زوج مرتب به صورت $(-3,1)$ است.

ت) $x = 1$ در هر دو ضابطه می‌تواند قرار بگیرد اما به ازای ضابطه اول $y = 1$ بوده و به ازای ضابطه دوم $y = 0$ است، پس این رابطه نمی‌تواند یک تابع باشد.

سوالات منتخب:

۱- کدام رابطه، یک تابع نیست؟

۱) $|x| + y^2 = 0$ ۲) $|x-1| + |y-2| = 0$ ۳) ✓ $f(x) = \begin{cases} x+2 & x \ge 1 \\ 2x & x \le 1 \end{cases}$ ۴) $y = |x|$

۲- چه تعداد از روابط زیر می‌تواند بیانگر ضابطهٔ یک تابع باشد؟

الف) $|y| + x = 1$ ب) $\sin y = x$ پ) $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 0$ ت) $[y] = x$

۱) ✓ ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۴۹ - چه تعداد از جفت توابع زیر با یکدیگر برابرند؟

الف) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^3} \\ g(x)=x\sqrt{x} \end{cases}$

ب) $\begin{cases} f(x)=[x^2] \\ g(x)=[x]^2 \end{cases}$

پ) $f(x)=x^2+x \quad g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-x}{x-1} & , x\neq 1 \\ 2 & , x=1 \end{cases}$

ت) $\begin{cases} f(x)=\log\dfrac{x-1}{x} \\ g(x)=2\log\sqrt{\dfrac{x-1}{x}} \end{cases}$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲- صفحه ۵۰ و ۵۱- متوسط)

هرتست ماز یک کلاس درس!

برای آنکه دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ با هم برابر باشند، باید همزمان ۲ شرط زیر برقرار باشد:

۱) $D_f=D_g$

۲) $x_0\in D_{f\cap g} \Rightarrow f(x_0)=g(x_0)$

مثال: تساوی دو تابع $f(x)=\sqrt{x^2}$ و $g(x)=|x|$ را بررسی کنید.

$$\begin{matrix} f(x)=\sqrt{x^2}=|x| & , D_f=\mathbb{R} \\ g(x)=|x| & , D_g=\mathbb{R} \end{matrix} \xrightarrow{D_f=D_g} f(x)=g(x)$$

به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

الف) $\begin{cases} f(x)=\sqrt{x^3}\Rightarrow x^3\geq 0\Rightarrow x\geq 0\Rightarrow D_f=[0,+\infty) \\ g(x)=x\sqrt{x}\Rightarrow x\geq 0\Rightarrow D_g=[0,+\infty) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} f(x)=x\sqrt{x} \\ g(x)=x\sqrt{x} \end{cases} \xrightarrow{D_f=D_g} f(x)=g(x)$

ب) در مورد (ب) دامنهٔ هر دو تابع یکسان و برابر $\mathbb{R}$ است اما مقدار تابع به ازای xهای یکسان تفاوت دارد:

$$\begin{cases} f(2/5)=[(2/5)^2]=[6/25]=6 \\ g(2/5)=[2/5]^2=2^2=4 \end{cases}$$

پ) در مورد (پ) دامنهٔ هر دو تابع یکسان و برابر $\mathbb{R}$ است. تابع $g(x)$ به ازای $x\neq 1$ برابر x^2+x بوده و همچنین حاصل هر دو تابع به ازای $x=1$ برابر است، پس دو تابع $f(x)$ و $g(x)$ با هم برابرند.

ت) $\begin{cases} f(x)=\log\dfrac{x-1}{x}\Rightarrow \dfrac{x-1}{x}>0\Rightarrow D_f=(-\infty,0)\cup(1,+\infty) \\ g(x)=2\log\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}\Rightarrow \dfrac{x-1}{x}>0\Rightarrow D_g=(-\infty,0)\cup(1,+\infty)\ ,\ g(x)=\log\left(\sqrt{\dfrac{x-1}{x}}\right)^2=\log\dfrac{x-1}{x} \end{cases} \xrightarrow{D_f=D_g} f(x)=g(x)$

۵۰ - اگر $f(x)=\dfrac{x+1}{x+2}$ و $g=\left\{(-2,3),(1,-2),(0,-1),(-\frac{3}{5},\frac{1}{2}),(-1,2)\right\}$ باشد، برد تابع $y=\dfrac{f+g^{-1}}{g^{-1}+2}$ شامل چند عضو است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲- صفحه ۶۵ تا ۷۰- متوسط)

هر تست ماز یک کلاس درس!

توابع را نیز می‌توان مانند اعداد جمع، تفریق، ضرب و تقسیم کرد و توابع جدید بدست آورد. [البته در هنگام تقسیم، تابع واقع در مخرج نباید صفر باشد]

برای هر x متعلق به دامنهٔ هر دو تابع f و g، می‌توان $f+g$ ، $f-g$ و $f.g$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\ ;\ D_{f+g}=D_f\cap D_g$$
$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)\ ;\ D_{f-g}=D_f\cap D_g$$
$$(f.g)(x)=f(x).g(x)\ ;\ D_{f.g}=D_f\cap D_g$$

برای هر x متعلق به دامنهٔ هر دو تابع f و g که در آن $g(x)\neq 0$ باشد، می‌توان $\frac{f}{g}$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\ ;\ D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=0\}$$

ابتدا g^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$g^{-1}=\{(3,-2),(-2,1),(-1,0),(\frac{1}{2},-\frac{3}{5}),(2,-1)\}$$

با توجه به آن که $D_f=R-\{-2\}$ است. پس $D_{f\cap g^{-1}}=\{3,-1,\frac{1}{2},2\}$ است. در ضمن به ازای $x=3$، مقدار تابع g^{-1} برابر -2 می‌شود. این عدد مخرج کسر $y=\frac{f+g^{-1}}{g^{-1}+2}$ را صفر می‌کند، پس:

$$x=-1:\ y=\frac{f(-1)+g^{-1}(-1)}{g^{-1}(-1)+2}=\frac{0+0}{0+2}=0\Rightarrow(-1,0)$$

$$x=\frac{1}{2}:\ y=\frac{f(\frac{1}{2})+g^{-1}(\frac{1}{2})}{g^{-1}(\frac{1}{2})+2}=\frac{\frac{3}{5}-\frac{3}{5}}{-\frac{3}{5}+2}=0\Rightarrow(\frac{1}{2},0)$$

$$x=2:\ y=\frac{f(2)+g^{-1}(2)}{g^{-1}(2)+2}=\frac{\frac{3}{4}-1}{-1+2}=-\frac{1}{4}\Rightarrow\left(2,-\frac{1}{4}\right)$$

پس برد تابع به صورت $R=\{0,-\frac{1}{4}\}$ است که شامل دو عضو است.

سوالات منتخب:

۱- اگر $f=\{(1,2),(2,3),(4,-1)\}$ و $g=\{(1,0),(3,2),(4,1)\}$ باشند، برد تابع $\frac{f+g}{f-g}$ کدام است؟

۱) $\{0,2\}$ ۲) $\{1,0\}$ ✓ ۳) $\{-1,1\}$ ۴) $\{0,-1\}$

۲- اگر $f(x)=x^2-2x+2$ و $g=\{(0,1),(1,2),(2,3)\}$ باشند، برد تابع $f+g$ کدام است؟

۱) $\{2,3,5\}$ ۲) $\{1,2,3\}$ ۳) $\{3,5\}$ ✓ ۴) $\{2,3\}$

گروه آموزشی ماز

۵۱ - اگر در تابع f برای هر $x_1,x_2\in D_f$ رابطهٔ $x_2>x_1\Rightarrow f(x_2)<f(x_1)$ برقرار باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{f(x^2)-f(x+2)}$ کدام است؟

۱) $[-1,2]$ ۲) $[1,2]$ ۳) $[-2,1]$ ۴) $[-2,-1]$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۶ تا ۱۰ ـ دشوار)

هر تست ماز یک کلاس درس!

در تابع اکیداً صعودی f، برای هر دو مقدار a و b داریم: $a<b\Rightarrow f(a)<f(b)$

در تابع اکیداً نزولی f، برای هر دو مقدار a و b داریم: $a<b\Rightarrow f(a)>f(b)$

با توجه به این که در تابع f برای هر $x_1, x_2 \in D_f$، رابطهٔ $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ برقرار است، پس تابع f، اکیداً نزولی می‌باشد. حال برای به‌دست آوردن دامنهٔ تابع داده شده داریم:

$$f(x^2) - f(x+2) \geq 0 \Rightarrow f(x^2) \geq f(x+2) \xrightarrow{\text{f نزولی است}} x^2 \leq x+2 \Rightarrow$$

$$x^2 - x - 2 \leq 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 2 \Rightarrow D_y = [-1, 2]$$

سؤالات منتخب

۱. اگر در تابع f برای هر $x_1, x_2 \in D_f$ رابطهٔ $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$ برقرار باشد، وضعیت یکنوایی تابع $g(x) = -2f(2x) + 3$ چگونه است؟

۱) همواره صعودی ۲) همواره نزولی ✓ ۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

۲. تابع با ضابطهٔ $f(x) = |x+2| + |x-1|$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟ (داخل ـ ۹۸)

۱) $(-\infty, -2)$ ✓ ۲) $(1, +\infty)$ ۳) $(-2, 1)$ ۴) $(-\infty, 1)$

www.biomaze.ir

۵۲ ـ اگر $f(x) = \sqrt{x+3} - 1$ باشد و نمودار دو تابع f^{-1} و $g(x) = 4x+1$ در ۲ نقطهٔ A و B متقاطع باشند، فاصلهٔ این دو نقطه کدام است؟

۱) $4\sqrt{15}$ ۲) $2\sqrt{15}$ ۳) $4\sqrt{17}$ ۴) $2\sqrt{17}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۲۴ تا ۲۹ ـ دشوار)

هر تست ماز یک کلاس درس!

برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع f^{-1} روی تابع f، ابتدا باید x را تنها کنیم و سپس جای x و y را عوض کنیم.

به عنوان مثال برای به‌دست آوردن معکوس تابع $f(x) = 3x+1$ داریم:

$$y = 3x+1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{3} \xrightarrow{\text{تعویض جای } y, x} y = \frac{x-1}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x-1}{3}$$

ابتدا با توجه به ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x+3} - 1$، ضابطهٔ تابع f^{-1} و دامنه‌اش را به‌دست می‌آوریم و می‌دانیم که دامنه تابع f^{-1}، همان برد تابع f است:

$$y = \sqrt{x+3} - 1 \Rightarrow y+1 = \sqrt{x+3} \Rightarrow (y+1)^2 = x+3 \Rightarrow x = (y+1)^2 - 3$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x) = (x+1)^2 - 3 = x^2 + 2x - 2 \;;\; x \in R_f \Rightarrow x \in [-1, +\infty)$$

حال برای به‌دست آوردن مختصات نقطهٔ A باید معادلهٔ $f^{-1}(x) = g(x)$ را حل کنیم:

$$x^2 + 2x - 2 = 4x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow y = -3 \Rightarrow A\left|\begin{matrix}-1\\-3\end{matrix}\right. \\ x = 3 \Rightarrow y = 13 \Rightarrow B\left|\begin{matrix}3\\13\end{matrix}\right. \end{cases}$$

$$\Rightarrow |AB| = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-16)^2} = \sqrt{4^2(1+16)} = 4\sqrt{17}$$

سؤالات منتخب

۱. اگر $f(x) = x^2 - 2x - 3 \;;\; x \geq 1$ باشد، نمودارهای دو تابع f^{-1} و $g(x) = \frac{x-9}{2}$ با کدام طول متقاطع هستند؟ (داخل ۹۸)

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱ ✓

۲. ضابطهٔ وارون تابع $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x + 3$ به‌صورت $f^{-1}(x) = a + \sqrt[3]{x+b}$ است. مقدار $a \times b$ کدام است؟

۱) -15 ۲) ۷ ۳) -22 ✓ ۴) ۱۲

گروه آموزشی ماز

۵۳ ـ اگر $g(x) = \sqrt{x-1}$ و $f(x) = 3 - 2g(x)$ باشند، معادلهٔ $g(x) + g(2x) = (fof^{-1})(x)$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) جواب ندارد.

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۲۴ تا ۲۹ ـ دشوار)

هر تست ماز یک کلاس درس!

در تابع $y = fof^{-1}(x)$ ، x ابتدا وارد تابع f^{-1} می‌شود، پس باید x عضو دامنهٔ f^{-1} یا عضو برد f باشد:

$y = fof^{-1}(x) = x \;;\; x \in D_{f^{-1}}$ یا $x \in R_f$

به عنوان مثال اگر تابع $f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$ باشد، چون $D_{f^{-1}} = R_f = [1, +\infty)$ است، پس:

$fof^{-1}(x) = x \;;\; x \in [1, +\infty)$

ابتدا ضابطهٔ تابع f را با توجه به تابع $g(x) = \sqrt{x-1}$ تشکیل می‌دهیم و برد آن را به‌دست می‌آوریم:

$f(x) = 3 - 2g(x) \Rightarrow f(x) = 3 - 2\sqrt{x-1} \;;\; R_f = (-\infty, 3]$

حال با توجه به این که $fof^{-1}(x) = x \;;\; x \in R_f$ است داریم:

$fof^{-1}(x) = x \;;\; x \in (-\infty, 3]$

سپس سمت چپ معادلهٔ داده شده را با توجه به تابع g تشکیل می‌دهیم و با شرط $x \in (-\infty, 3]$ معادله را حل می‌کنیم:

$g(x) + g(2x) = (fof^{-1})(x) \Rightarrow \sqrt{x-1} + \sqrt{2x-1} = x \Rightarrow \sqrt{2x-1} = x - \sqrt{x-1} \xrightarrow{\text{توان ۲}}$

$2x - 1 = x^2 - 2x\sqrt{x-1} + x - 1 \Rightarrow x^2 - x - 2x\sqrt{x-1} = 0 \Rightarrow x\left(x - 1 - 2\sqrt{x-1}\right) = 0$

$$x\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1} - 2\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \;\times \\ \sqrt{x-1} = 0 \Rightarrow x = 1 \;\checkmark \\ \sqrt{x-1} - 2 = 0 \Rightarrow \sqrt{x-1} = 2 \Rightarrow x - 1 = 4 \Rightarrow x = 5 \;\times \end{cases}$$

با توجه به این که $x = 0$ باعث منفی شدن زیر رادیکال می‌شود و $x = 5$ عضو بازهٔ مدنظر نیست، بنابراین معادله تنها یک جواب ($x = 1$) دارد.

سؤالات منتخب

۱ـ اگر $f(x) = 5 + \sqrt{x-2}$ باشد، آنگاه تابع $(f^{-1}of)(x)$ کدام است؟

۱) $x \;;\; x \geq 5$ ۲) $x \;;\; x \geq 2$ ✓ ۳) $-x \;;\; x \geq 5$ ۴) $-x \;;\; x \geq 2$

۲ـ اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ باشد، نمودار توابع $f^{-1}of$ و $g(x) = x^2 - x$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟

۱) ۱ ✓ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) غیرمتقاطع

www.biomaze.ir

۵۴ـ اگر $g(x) = 2x + 1$ و $(fog)(x) = 8x^2 + 6x + 5$ باشند، معادلهٔ $(gof)(x) = 6x + f(x)$ دارای چند جواب صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۱ تا ۱۴ ـ دشوار)

هر تست ماز یک کلاس درس!

برای تعیین ضابطهٔ f با داشتن توابع fog و g ابتدا ضابطهٔ تابع $g(x)$ را برابر با t فرض کرده و x را برحسب t به‌دست می‌آوریم سپس در تابع مرکب داده شده به جای x ، عبارت به‌دست آمده برحسب t را قرار می‌دهیم و تابع f را برحسب t به‌دست می‌آوریم و در آخر هم در تابع $f(t)$ به جای همهٔ t ها، x قرار می‌دهیم تا ضابطهٔ $f(x)$ به‌دست آید.

به عنوان مثال اگر $g(x) = x + 1$ و $(fog)(x) = 2x + 3$ باشد برای به‌دست آوردن تابع $f(x)$ داریم:

$g(x) = x + 1 = t \Rightarrow x = t - 1$

$f(g(x)) = 2x + 3 \Rightarrow f(t) = 2(t-1) + 3 = 2t + 1 \Rightarrow f(x) = 2x + 1$

برای به‌دست آوردن تابع $f(x)$ داریم:

$g(x) = 2x + 1 = t \Rightarrow x = \frac{t-1}{2}$

$f(g(x)) = 8x^2 + 6x + 5 \Rightarrow f(t) = 8\left(\frac{t-1}{2}\right)^2 + 6\left(\frac{t-1}{2}\right) + 5 = 2t^2 - t + 4$

$\Rightarrow f(x) = 2x^2 - x + 4$

حال برای تشکیل معادلهٔ داده شده، ابتدا تابع **gof** را تشکیل می‌دهیم:

$$(gof)(x) = g\big(f(x)\big) = 2f(x) + 1 = 2(2x^2 - x + 4) + 1 = 4x^2 - 2x + 9$$

حال معادلهٔ داده شده را تشکیل می‌دهیم و حل می‌کنیم:

$$(gof)(x) = 6x + f(x) \Rightarrow 4x^2 - 2x + 9 = 6x + 2x^2 - x + 4 \Rightarrow 2x^2 - 7x + 5 = 0$$

مجموع ضرایب صفر است $\rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{5}{2} = 2/5 \end{cases} \Rightarrow$ معادله دارای یک جواب صحیح است

سؤالات منتخب

۱. اگر $g(x) = 2x - 3$ و $(fog)(x) = 4(x^2 - 4x + 5)$ باشند، تابع $f(x)$ کدام است؟ (راهنما ۹۳)

۱) $x^2 - 4x + 3$ ۲) $x^2 - 4x + 5$ ۳) $x^2 - 2x + 5$ ✓ ۴) $x^2 - 2x + 3$

۲. اگر $f(x) = 2x + 3$ و $g\big(f(x)\big) = 8x^2 + 22x + 20$ باشند، ضابطهٔ تابع **fog** کدام است؟

۱) $2x^2 - 7x + 3$ ۲) $2x^2 - 3x + 7$ ۳) $4x^2 - 2x + 13$ ✓ ۴) $4x^2 - 4x + 11$

گروه آموزشی ماز

۵۵ - برد تابع $y = \frac{3^x - 3}{3^{x+1} + 1}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

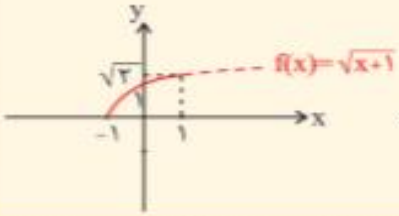
پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۱ تا ۱۴ ـ دشوار)

هر تست ماز یک کلاس درس!

برای به‌دست آوردن برد تابع $u = f\big(g(x)\big)$ باید برد تابع درونی (g) را به عنوان دامنه ضابطهٔ تابع بیرونی (f) در نظر بگیریم:

مثال: اگر $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = \sin x$ باشد برد تابع $y = (fog)(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟

با توجه به این که در تابع $y = (fog)(x)$، برد تابع g همان دامنهٔ تابع f و برابر با بازهٔ $[-1, 1]$ است، کافیست برای به‌دست آوردن برد تابع $y = (fog)(x)$، برد تابع f با دامنهٔ $[-1, 1]$ را به وسیلهٔ رسم نمودار به‌دست آوریم:

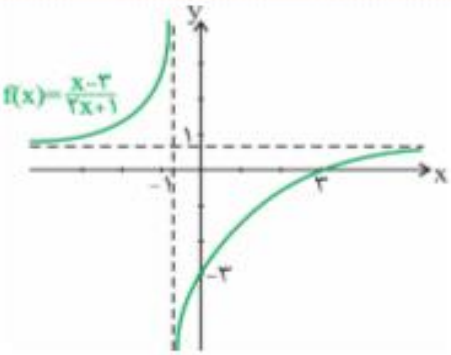


$$\Rightarrow R_{fog} = [0, \sqrt{2}]$$

بنابراین برد تابع fog شامل دو عدد صحیح ۰ و ۱ است.

تابع $y = \frac{3^x - 3}{3^{x+1} + 1} = \frac{3^x - 3}{3 \times 3^x + 1}$ از ترکیب دو تابع $g(x) = 3^x$ و $f(x) = \frac{x-3}{3x+1}$ تشکیل شده است.

با توجه به این که برد تابع g بازهٔ $(0, +\infty)$ است، کافیست برد تابع f را با دامنهٔ $(0, +\infty)$ به‌دست آوریم:



با توجه به نمودار، برد تابع f در بازهٔ $(0, +\infty)$، که همان برد تابع $y = \frac{3^x - 3}{3^{x+1} + 1}$ است برابر بازهٔ $\left(-3, \frac{1}{3}\right)$ است و این بازه شامل سه عدد صحیح $-2, -1, 0$ است.

۵۶ - چه تعداد از روابط زیر می‌تواند بیانگر ضابطه یک تابع باشد؟

الف) $|x-1|+|y+1|-1=0$ ب) $|-x^2|+(y-1)^2=\frac{1}{2}$ ج) $\sin|x|+\cos^2 y=1$ د) $[[x]+y]=0$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۱، ریاضی ۲ ـ صفحه ۹۵ تا ۱۱۷ ریاضی ۱، صفحه ۴۸ تا ۵۶ ریاضی ۲ ـ دشوار)

هر تست ماز یک کلاس درس!

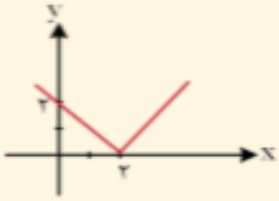
رابطه‌ای می‌تواند تابع باشد که به ازای هر x عضو دامنه، دقیقاً یک y داشته باشد.

برای بررسی تابع بودن یک رابطه همچنین می‌توانیم از رسم نمودار یا نقطه‌گذاری نیز استفاده کنیم.

مثال) تابع بودن روابط زیر را بررسی کنید.

الف) $y=\sqrt{x^2-4x+4}$

$y=\sqrt{x^2-4x+4}=\sqrt{(x-2)^2}=|x-2|$



نمودار فوق نمایش یک تابع است. پس $y=\sqrt{x^2-4x+4}$، یک تابع محسوب می‌شود.

ب) $|x|+|y|=5$

با قرار دادن $x=1$ در رابطه فوق، دو مقدار $y=+4$ و $y=-4$ بدست می‌آید، پس این رابطه تابع نیست.

بررسی آیتم‌ها:

الف) $|x-1|+|y+1|-1=0 \Rightarrow |x-1|+|y+1|=1$

با قرار دادن $x=1$ در رابطه فوق، دو مقدار $y=0$ و $y=-2$ بدست می‌آید، پس این رابطه تابع نیست.

ب) $|-x^2|+(y-1)^2=\frac{1}{2}$

با قرار دادن $x=0$ در رابطهٔ فوق دو مقدار $y=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}+1$ بدست می‌آید، پس این رابطه تابع نیست.

ج) $\sin|x|+\cos^2 y=1$

به ازای $x=0$، مقادیر $y=0$، $y=\pi$، $y=2\pi$، $y=3\pi$ و ... بدست می‌آید، پس این رابطه تابع نیست.

د) $[[x]+y]=0 \Rightarrow [x]+[y]=0$

به ازای $x=0$، $0\le y<1$ خواهد بود و شامل بی‌شمار مقدار می‌شود، پس این رابطه تابع نیست.

سوالات منتخب:

۱- چه تعداد از روابط زیر می‌تواند بیانگر ضابطهٔ یک تابع باشد؟

الف) $|y|+x=1$ ب) $\sin y=x$ ج) $(x-1)^2+(y-4)^2=0$ د) $[y]=x$

۱) ۱ ✓ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

۲- کدام رابطه نشان دهندهٔ یک تابع است؟

۱) $|y|+|x|=4$ ۲) $y=\sqrt{x^2-1}$ ✓ ۳) $y^2=5x-1$ ۴) $y(x-2)=0$

گروه آموزشی ماز

۵۷ - هرگاه نمودار تابع $f(-x+2)$ بر نیمساز ربع دوم و چهارم منطبق باشد و $fog(x+2)=-x^2$ باشد، ضابطه $2f(x)-g(x)$ کدام است؟

۱) x^2+2x+8 ۲) x^2+2x-8 ۳) x^2-2x-8 ۴) x^2-2x+8

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ و ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۱ تا ۲۳ ریاضی ۳، صفحه ۶۵ تا ۷۰ ریاضی ۲ ـ دشوار)

هر تست ماز یک کلاس درس!

توابع را نیز می‌توان مانند اعداد جمع، تفریق، ضرب و تقسیم کرد و توابع جدید بدست آورد. [البته در هنگام تقسیم، تابع واقع در مخرج نباید صفر باشد.]

برای هر x متعلق به دامنه هر دو تابع f و g، می‌توان $f+g$ ، $f-g$ و $f.g$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\ ;\ D_{f+g}=D_f\cap D_g$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)\ ;\ D_{f-g}=D_f\cap D_g$$

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)\ ;\ D_{f.g}=D_f\cap D_g$$

برای هر x متعلق به دامنه هر دو تابع f و g که در آن $g(x)\neq 0$ باشد، می‌توان $\frac{f}{g}$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\ ;\ D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x|g(x)=0\}$$

برای تعیین ضابطهٔ f با داشتن توابع fog و g ابتدا ضابطهٔ تابع $g(x)$ را برابر با t فرض کرده و x را برحسب t به دست می‌آوریم، سپس در تابع مرکب داده شده به جای x، عبارت به دست آمده برحسب t را قرار می‌دهیم و تابع f را برحسب t به دست می‌آوریم و در آخر هم در تابع $f(t)$ به جای همهٔ tها، x قرار می‌دهیم تا ضابطهٔ $f(x)$ به دست آید.

به عنوان مثال، اگر $g(x)=x+1$ و $(fog)(x)=2x+3$ باشد برای به دست آوردن تابع $f(x)$ داریم:

$$g(x)=x+1=t\Rightarrow x=t-1$$

$$f(g(x))=2x+3\Rightarrow f(t)=2(t-1)+3\Rightarrow f(x)=2x+1$$

از آن جایی که نمودار تابع $f(-x+4)$ بر نیمساز ربع دوم و چهارم منطبق است، پس داریم:

$$f(-x+4)=-x\xrightarrow{-x+4=t}f(t)=t-4\Rightarrow f(x)=x-4$$

$$fog(x+2)=-x^2\xrightarrow{x+2=t}fog(t)=-(t-2)^2\Rightarrow f(g(x))=-(x-2)^2$$

$$\xrightarrow{f(x)=x-4}f(g(x))=g(x)-4\Rightarrow g(x)-4=-(x-2)^2\Rightarrow g(x)=4-(x-2)^2$$

$$\Rightarrow 2f(x)-g(x)=2(x-4)-\left(4-(x-2)^2\right)=x^2-2x-8$$

سوالات منتخب:

۱- اگر $g(x)=2x-3$ و $fog(x)=4(x^2-4x+5)$ باشد، تابع $f(x)$ کدام است؟

۱) x^2-4x+3 ۲) x^2-4x+5 ۳) x^2-2x+5 ✔ ۴) x^2-2x+3

۲- اگر $f(x)=2x+3$ و $g(f(x))=8x^2+22x+20$ باشد، ضابطهٔ تابع fog کدام است؟

۱) $2x^2-7x+3$ ۲) $2x^2-3x+7$ ۳) $4x^2-2x+13$ ✔ ۴) $4x^2-4x+11$

www.biomaze.ir

۵۸ - اگر $f(x)=\sqrt{2-x}+x^2-4x$ و دامنه تعریف تابع $y=\sqrt{f(2x-1)-f(1-x)}$ بازهٔ $[a,b]$ باشد، حاصل $b-a$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{2}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) $\frac{5}{6}$ ۴) $\frac{5}{3}$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۲ تا ۱۱ ریاضی ۳ ـ دشوار)

هر تست ماز یک کلاس درس!

در تابع اکیداً صعودی f، برای هر دو مقدار a و b عضو دامنه داریم: $a<b\Rightarrow f(a)<f(b)$

در تابع اکیداً نزولی f، برای هر دو مقدار a و b عضو دامنه داریم: $a<b\Rightarrow f(a)>f(b)$

مجموع دو تابع اکیداً صعودی یا مجموع یک تابع اکیداً صعودی و یک تابع صعودی، تابعی اکیداً صعودی است. به طور مشابه مجموع دو تابع اکیداً نزولی یا مجموع یک تابع اکیداً نزولی و یک تابع نزولی، تابعی اکیداً نزولی است.

www.mapedu.ir

ابتدا دامنه تابع $f(x)$ را بدست می‌آوریم:

$$f(x)=\sqrt{2-x}+x^2-4x \Rightarrow 2-x\ge 0 \Rightarrow x\le 2 \Rightarrow D_f=(-\infty,2]$$

همچنین می‌دانیم تابع $f(x)$ به ازای $x\le 2$ تابعی نزولی است، چون هر یک از توابع $\sqrt{2-x}$ و x^2-4x در این بازه نزولی هستند و می‌دانیم جمع دو تابع نزولی، تابعی نزولی خواهد بود، پس داریم:

$$y=\sqrt{f(2x-1)-f(1-x)} \Rightarrow f(2x-1)-f(1-x)\ge 0 \Rightarrow f(2x-1)\ge f(1-x)$$

$$\xrightarrow{f \text{ تابعی نزولی است}} 2x-1\le 1-x \Rightarrow 3x\le 2 \Rightarrow x\le \frac{2}{3} \quad (1)$$

از آنجایی که دامنهٔ تابع $f(x)$ برابر $(-\infty,2]$ است، پس دامنهٔ توابع $f(2x-1)$ و $f(1-x)$ نیز باید در این بازه مقدار داشته باشد، پس داریم:

$$2x-1\le 2 \Rightarrow x\le \frac{3}{2} \quad (2)$$

$$1-x\le 2 \Rightarrow x\ge -1 \quad (3)$$

از اشتراک (۱)، (۲) و (۳)، دامنه تابع $[-1,\frac{2}{3}]$ است و $b-a=\frac{2}{3}-(-1)=\frac{5}{3}$ است.

سوالات منتخب:

۱- وضعیت یکنوایی تابع $f(x)=3+\frac{1}{1+2^{-x}}$ چگونه است؟

۱) همواره صعودی ✓ ۲) همواره نزولی

۳) ابتدا صعودی، سپس نزولی ۴) ابتدا نزولی، سپس صعودی

۲- اگر f تابعی اکیداً صعودی با دامنه $\mathbb{R}$ باشد و از مبدأ مختصات عبور کند، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{xf(x-1)}$ کدام است؟

۱) $[0,1]$ ۲) $[1,+\infty)$ ۳) $\mathbb{R}-(0,1)$ ✓ ۴)

گروه آموزشی ماز

۵۹ - اگر $f(x)=2+\sqrt{x-1}$ باشد و داشته باشیم $f^{-1}og(x)+g(x)=x^2-5x+9$، ضابطهٔ تابع $g(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) x ۲) $2x$ ۳) $x-1$ ۴) $x-4$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۱ تا ۲۹ ـ دشوار)

هر تست ماز یک کلاس درس!

برای به دست آوردن ضابطهٔ تابع f^{-1} روی تابع f، ابتدا باید x را تنها کنیم و سپس جای x و y را عوض کنیم.

به عنوان مثال، برای به دست آوردن معکوس تابع $f(x)=3x+1$ داریم:

$$y=3x+1 \Rightarrow x=\frac{y-1}{3} \xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y} y=\frac{x-1}{3} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x-1}{3}$$

ابتدا با استفاده از ضابطهٔ $f(x)$، $f^{-1}(x)$ را بدست می‌آوریم و داریم:

$$y=2+\sqrt{x-1} \Rightarrow (y-2)^2=x-1 \Rightarrow x=(y-2)^2+1 \Rightarrow f^{-1}(x)=(x-2)^2+1 \;;\; x\ge 2$$

$$f^{-1}og(x)+g(x)=x^2-5x+9 \Rightarrow (g(x)-2)^2+1+g(x)=x^2-5x+9 \Rightarrow$$

$$g^2(x)-3g(x)+5=x^2-5x+9 \Rightarrow g^2(x)-3g(x)+\frac{9}{4}-\frac{9}{4}+5=x^2-5x+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}+9$$

$$\Rightarrow (g(x)-\frac{3}{2})^2+\frac{11}{4}=(x-\frac{5}{2})^2+\frac{11}{4} \Rightarrow \begin{cases} g(x)-\frac{3}{2}=x-\frac{5}{2} \Rightarrow g(x)=x-1 \\ g(x)-\frac{3}{2}=-(x-\frac{5}{2}) \Rightarrow g(x)=-x+4 \end{cases}$$

فقط $g(x)=x-1$ در گزینه ۳ وجود دارد.

سوالات منتخب:

۱- ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=x^3-6x^2+12x+3$ به صورت $f^{-1}(x)=a+\sqrt[3]{x+b}$ است. مقدار $a\times b$ کدام است؟

۱) -15 ۲) 7 ۳) -22 ✔ ۴) 12

۲- ضابطهٔ وارون تابع $f(x)=x\sqrt{x}+1$ به کدام صورت است؟

۱) $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ و $x\geq 1$ ✔ ۲) $y=\sqrt[3]{(x-1)^2}$ و $x\in\mathbb{R}$

۳) $y=\sqrt[3]{x^2-1}$ و $x\geq 1$ ۴) $y=\sqrt[3]{x^2-1}$ و $x\in\mathbb{R}$

www.biomaze.ir

۶۰ - اگر $fog^{-1}=\{(1,5),(2,4),(5,0),(7,2)\}$ و $f(x)=2-x$ باشد، حاصل $gof^{-1}(0)+g^{-1}of^{-1}(1)$ کدام است؟

۱) 2 ۲) 3 ۳) 9 ۴) 12

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ، ریاضی ۳ ـ صفحه ۵۹ تا ۷۰ ریاضی ۲ ، صفحه ۱۱ تا ۱۴ و ۲۴ تا ۲۹ ریاضی ۳ ـ دشوار)

هر تست ماز یک کلاس درس!

با جابه‌جا کردن مولفه‌های زوج مرتب (a,b)، به زوج مرتب (b,a) می‌رسیم. حال اگر مولفه‌های همهٔ زوج مرتب‌های تابع f را جابه‌جا کنیم، رابطهٔ جدیدی به دست می‌آید که آن را وارون تابع f می‌گوییم و با f^{-1} نشان می‌دهیم.

مثال) $f=\{(6,3),(2,5),(3,4)\}\Rightarrow f^{-1}=\{(3,6),(5,2),(4,3)\}$

با مشخص بودن اعضای fog^{-1} و ضابطهٔ $f(x)$ می‌توانیم اعضای g و g^{-1} را بدست آوریم:

$(1,5)\in fog^{-1}\Rightarrow 1\rightarrow \boxed{g^{-1}}\rightarrow \boxed{f(x)=2-x}\rightarrow 5\Rightarrow 2-x=5\Rightarrow x=-3\Rightarrow (1,-3)\in g^{-1}$

$(2,4)\in fog^{-1}\Rightarrow 2\rightarrow \boxed{g^{-1}}\rightarrow \boxed{f(x)=2-x}\rightarrow 4\Rightarrow 2-x=4\Rightarrow x=-2\Rightarrow (2,-2)\in g^{-1}$

$(5,0)\in fog^{-1}\Rightarrow 5\rightarrow \boxed{g^{-1}}\rightarrow \boxed{f(x)=2-x}\rightarrow 0\Rightarrow 2-x=0\Rightarrow x=2\Rightarrow (5,2)\in g^{-1}$

$(7,2)\in fog^{-1}\Rightarrow 7\rightarrow \boxed{g^{-1}}\rightarrow \boxed{f(x)=2-x}\rightarrow 2\Rightarrow 2-x=2\Rightarrow x=0\Rightarrow (7,0)\in g^{-1}$

پس g و g^{-1} به صورت زیر هستند:

$g^{-1}=\{(1,-3),(2,-2),(5,2),(7,0)\}$

$g=\{(-3,1),(-2,2),(2,5),(0,7)\}$

$f(x)=2-x\Rightarrow f^{-1}(x)=2-x$

$gof^{-1}(0)+g^{-1}of^{-1}(1)=g(2)+g^{-1}(1)=5+(-3)=2$

سوالات منتخب:

۱- دو تابع $f=\{(2,5),(6,3),(3,7),(4,1),(1,9)\}$ و $g(x)=\frac{x}{x-1}$ مفروض‌اند. اگر $f^{-1}(g(2a))=6$ باشد، a کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{3}{4}$ ✔ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{5}{2}$

۲- دو تابع $f=\{(5,2),(7,3),(1,4),(3,6),(9,1)\}$ و $g(x)=\sqrt{5x+9}$ مفروض‌اند. اگر $(g^{-1}of^{-1})(a)=8$ باشد، a کدام است؟

۱) 2 ۲) 3 ✔ ۳) 6 ۴) 7

www.mapedu.ir

۶۱ پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱، ریاضی ۲، ریاضی ۳ ـ صفحه ۹۵ تا ۱۱۷ ریاضی ۱، صفحه ۴۹ تا ۶۴ ریاضی ۲، صفحه ۲۴ تا ۳۰ ریاضی ۳ ـ دشوار)

هر تست ما ز یک کلاس درس!

برای تعیین دامنهٔ تابع f با داشتن ضابطهٔ آن، به موارد زیر توجه کنید:

دامنهٔ توابع معروف	
۱) دامنهٔ تابع چندجمله‌ای $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ برابر $\mathbb{R}$ است.	$f(x)=2x^3+4x^2-x-10 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}$
۲) چون عبارت‌های کسری به ازای ریشهٔ مخرج تعریف نشده هستند، پس دامنهٔ آن‌ها برابر است با: $D=\mathbb{R}-\{\text{ریشه‌های مخرج}\}$	$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{x-1} \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{0,1\}$
۳) در رادیکال‌های با فرجهٔ زوج، باید عبارت زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد.	$y=\sqrt{4-x} \Rightarrow 4-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 4 \Rightarrow D_f=(-\infty,4]$
۴) چون $\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$ است، پس باید شرط $\cos x\neq 0$ برقرار باشد، بنابراین: $D=\mathbb{R}-\{x=k\pi+\frac{\pi}{2}\}\ (k\in\mathbb{Z})$	$y=x+\tan x \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{x=k\pi+\frac{\pi}{2}\}$
۵) چون $\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}$ است، پس باید شرط $\sin x\neq 0$ برقرار باشد، بنابراین: $D=\mathbb{R}-\{x=k\pi\}\ (k\in\mathbb{Z})$	$y=5+2\cot x \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{x=k\pi\}$
۶) در توابع لگاریتمی، باید عبارت جلوی لگاریتم مثبت و مبنای لگاریتم مثبت و مخالف یک باشد. $y=\log_{\bigcirc}^{\Delta} \Rightarrow \begin{cases}\Delta>0\\ \bigcirc>0\ ,\ \bigcirc\neq 1\end{cases}$	$y=\log_{(2-x)}^{(x-1)} \Rightarrow \begin{cases}x-1>0 \Rightarrow x>1\\ 2-x>0 \Rightarrow 2>x \Rightarrow D_f=(1,2)\cup(2,3)\\ 2-x\neq 1 \Rightarrow x\neq 2\end{cases}$

هنگام یافتن دامنه، نباید ضابطهٔ تابع را ساده کنید.

ابتدا تابع $f(x)$ را بدست می‌آوریم:

$$f^{-1}(x)=3^{x+1} \Rightarrow y=3\times 3^x \Rightarrow \frac{y}{3}=3^x \Rightarrow \log_3^{\frac{y}{3}}=x \Rightarrow f(x)=\log_3^{\frac{x}{3}}$$

$$g(x)=\sqrt{\frac{f(x-1)}{7x-x^2-6}}=\sqrt{\frac{f(x-1)}{(x-1)(6-x)}} \Rightarrow g(x+1)=\sqrt{\frac{f(x)}{(x)(5-x)}}=\sqrt{\frac{\log_3^{\frac{x}{3}}}{(x)(5-x)}} \Rightarrow \frac{\log_3^{\frac{x}{3}}}{(x)(5-x)}\geq 0$$

همچنین می‌دانیم عبارت مقابل لگاریتم باید مثبت باشد، پس $x>0$ است و برای به دست آوردن مجموعه جواب تامساوی فوق داریم:

x		0		3		5	
$\log_3^{\frac{x}{3}}$			$-$	0	$+$		$+$
$x(5-x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
$g(x+1)$		$\nexists$	$-$	0	$+$	$\nexists$	$-$

$\Rightarrow 3\leq x<5$

پس دامنه تابع $g(x+1)$ شامل اعداد طبیعی ۳ و ۴ است.

۶۲ - اگر تابع $f=\{(۲,۱),(۶,۵),(-۱,۳),(۸,۱۰)\}$ و $g(x)=\dfrac{\sqrt{۲-\sqrt{x-۲}}}{x^۲-۴}$ باشد، برد تابع $\left(\dfrac{f-g}{g}\right)(x)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱- ۳) ۱ ۴) عضوی ندارد.

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۶۵ الی ۷۰ ـ دشوار)

هر تست ماز یک کلاس درس!

برای انجام عملیات روی توابع ابتدا باید دامنه مشترک انتخاب کنیم، سپس عملیات موردنظر را بر روی خروجی توابع انجام دهیم.

اگر یکی از توابع زوج مرتبی بود، اعضای دامنه آن را در تابع دیگر چک کنید. $D_f \cap D_g$

برای دامنه مشترک اعضای دامنه f را در تابع g چک می‌کنیم.

$$۲ \to g(۲)=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۲-۲}}}{۴-۴}=\frac{\sqrt{۲}}{-} \times$$

$$۶ \to g(۶)=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۶-۲}}}{۳۶-۴}=\frac{-}{۳۲}=- \checkmark$$

$$-۱ \to g(-۱)=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{-۱-۲}}}{۱-۴} \to \times$$ زیررادیکال منفی

$$۸ \to g(۸)=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۸-۲}}}{۶۴-۴}=\frac{\sqrt{۲-\sqrt{۶}}}{۶-} \times$$ زیر رادیکال منفی

تنها یک عضو مشترک دارند حالا تابع مورد نظر را در $x=۶$ می‌سازیم:

$$\frac{f(۶)-g(۶)}{g(۶)}=\frac{۵--}{-}=\frac{۵}{-} \times$$ مخرج

عضوی ندارد.

سوالات منتخب:

اگر $f=\{(۱,۳),(۲,-),(۳,۲),(۴,۱)\}$ و $g=\{(۳,۱),(۲,۱),(۴,۲)\}$ باشد، تابع $\frac{g}{f}+g$ کدام است؟

۱) $\{(۳,\frac{۳}{۲}),(۲,۱),(۴,۴)\}$ ۲) $\{(۳,۱),(۴,۴)\}$

۳) $\{(۳,۱),(۲,۱),(۴,۴)\}$ ۴) $\{(۳,\frac{۳}{۲}),(۴,۴)\}$ ✓

گروه آموزشی ماز

۶۳ - اگر $f(x)=x+۲$ و $gof(x)=|f(x)-۱|-|f(x)-۴|$ باشد، آن‌گاه در بازه‌ای که تابع $y=fog(x)$ اکیداً صعودی است، وارون تابع y کدام است؟

۱) $y=\frac{x+۳}{۲}\ ;\ -۱\le x\le ۵$ ۲) $y=\frac{x+۳}{۲}\ ;\ ۱\le x\le ۴$

۳) $y=۲(x+۳)\ ;\ -۱\le x\le ۵$ ۴) وارون‌پذیر نیست.

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ و ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۱ الی ۱۴ ریاضی ۳ ، صفحه ۵۷ الی ۶۴ ریاضی ۲ ـ دشوار)

با توجه به توضیح درسنامه ضابطه تابع $g(x)=|x-۱|-|x-۴|$ است، حال به سراغ تشکیل تابع $fog(x)$ می‌رویم.

$$f(|x-۱|-|x-۴|)=|x-۱|-|x-۴|+۲$$

برای تعیین بازه‌ای که تابع در آن اکیداً صعودی است باید در ریشه‌های قدرمطلق تابع را چندضابطه‌ای کنیم.

$$fog(x)=\begin{cases}(۱-x)-(۴-x)+۲=-۱ & ;\ x<۱\\ (x-۱)-(۴-x)+۲=۲x-۳ & ;\ ۱\le x\le ۴\\ (x-۱)-(x-۴)+۲=۵ & ;\ x>۴\end{cases}$$

در این بازه صعودی اکید است ← وارون $=\frac{x+۳}{۲}$

دامنه تابع وارون = برد تابع اصلی

$۲x-۳ \Rightarrow$ سربازه: $۱ \to -۱$ ، تهبازه: $۴ \to ۵$ $\Rightarrow$ برد تابع $fog(x)$ در این بازه $=[-۱,۵]=$ دامنه وارون تابع $fog(x)$

۶۴- اگر مجموعهٔ $f=\{(2,b^2+1),(3,3),(2,5),(1,a^2),(b,4),(1,9),(a,2)\}$ تابع باشد، در این صورت $(b-a)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) 1 ۳) -5 ۴) 5

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ ـ صفحه ۹۹ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم یک مجموعه از زوج‌های مرتب، وقتی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مولفه‌های اول برابر در آن یافت نشود.

$(2,b^2+1)\in f,(2,5)\in f \xrightarrow{\text{تابع } f} b^2+1=5 \Rightarrow b^2=4 \Rightarrow b=\pm 2$

$(1,a^2)\in f,(1,9)\in f \xrightarrow{\text{تابع } f} a^2=9 \Rightarrow a=\pm 3$

اگر $b=2 \Rightarrow (b,4)=(2,4)\in f,\ (2,5)\in f$ با تابع بودن f تناقض دارد.

$\Rightarrow b\neq 2 \Rightarrow b=-2$

اگر $a=3 \Rightarrow (a,2)=(3,2)\in f,\ (3,3)\in f$ با تابع بودن f تناقض دارد.

$\Rightarrow a\neq 3 \Rightarrow a=-3 \Rightarrow b-a=-2+3=1$

گروه آموزشی ماز

۶۵- اگر $f=\{(a,2),(4,3),(4,a^2-2a),(-1,a^2)\}$ تابع باشد، در این صورت مجموع ریشه‌های معادلهٔ $x^4-6x^3+a^2x^2=0$ کدام است؟

۱) -3 ۲) 4 ۳) 2 ۴) 3

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۱ ـ صفحه ۹۹ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

چون f تابع است، طبق تعریف تابع نباید هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مولفه‌های اول برابر در f یافت شود.

f تابع است $\Leftrightarrow (x_1,y_1)\in f,\ (x_1,y_2)\in f \Rightarrow y_1=y_2$

$(4,3)\in f,\ (4,a^2-2a)\in f \Rightarrow a^2-2a=3 \Rightarrow a^2-2a-3=0 \Rightarrow (a-3)(a+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=-1 \\ a=3 \end{cases}$

اگر $a=-1 \Rightarrow (-1,a^2)=(-1,1)\in f,\ (a,2)=(-1,2)\in f$

چون f تابع است، تناقض ایجاد می‌شود؛ پس فقط $a=3$ قابل قبول است.

$a=3 \Rightarrow x^4-6x^3+a^2x^2=x^4-6x^3+9x^2=0$

$\Rightarrow x^2(x^2-6x+9)=0 \Rightarrow x^2\left[(x-3)^2\right]=0$

$\Rightarrow x=0$ یا $x=3 \Rightarrow$ مجموع ریشه‌ها $=0+3=3$

گروه آموزشی ماز

۶۶- در کدام‌یک از رابطه‌های زیر، y تابعی از x است؟ (نماد $[x]$ به معنی جزء صحیح x می‌باشد.)

۱) $y^2-y=4x-1$ ۲) $|x+2|+(y^2-4)^2=0$ ۳) $y=[x]+x$ ۴) $y=\begin{cases} x^2 & x>3 \\ x+1 & x<4 \end{cases}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱ و ۲ ـ ترکیبی ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

بررسی موارد:

۱) $x=\frac{1}{4} \Rightarrow y^2-y=4\times(\frac{1}{4})-1=0 \Rightarrow y(y-1)=0 \Rightarrow y=0$ یا $y=1$

(به ازای یک مقدار برای x، دو مقدار برای y به دست آمد، لذا y تابعی از x نمی‌باشد.)

۲

$$|x+2|+(y^2-4)^2=0 \Rightarrow |x+2|=0\ ,\ (y^2-4)^2=0$$

(اگر مجموع چند مقدار نامنفی صفر شود، هر یک از آن‌ها باید صفر باشند.)

$$|x+2|=0 \Rightarrow x=-2\ ,\ (y^2-4)^2=0 \Rightarrow y^2-4=0 \Rightarrow y=\pm 2$$

در این ضابطه نیز به ازای یک مقدار برای x $(x=-2)$ دو مقدار برای y به دست آمد، لذا y نمی‌تواند تابعی از x باشد.

۳ واضح است که به ازای هر $x \in \mathbb{R}$ ، یک مقدار منحصر به فرد برای y حاصل می‌شود؛ پس این ضابطه تابع است.

۴ برای بررسی تابع بودن یک رابطهٔ چند ضابطه‌ای، به نکته بسیار مهم زیر توجه کنید:

نکته:
در صورتی یک رابطهٔ چندضابطه‌ای تابع است که اولاً در دامنه‌های ضابطه‌ها نقطهٔ مشترکی وجود نداشته باشد و در ثانی اگر دامنهٔ ضابطه‌ها اشتراک داشت، در آن نقاط مشترک، مقدار y برابر باشد.

دامنه ضابطه بالایی $x>3$ و دامنه ضابطهٔ پایینی $x<4$ است و لذا در بازهٔ $3<x<4$ اشتراک دارند و لذا این رابطهٔ دو ضابطه‌ای تابع نیست.

$$x=3/5 \Rightarrow \begin{cases} y=x^2=(3/5)^2=12/25 \\ y=x+1=4/5 \end{cases}$$

برای یک مقدار $x=3/5$ دو مقدار برای y به دست آمد، لذا تابع نیست.

گروه آموزشی ماز

۶۷- دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\left(\sqrt{9-x^2}\right)^2-8}$ کدام است؟

۱) $[-5,5]$ ۲) $[-1,1]$ ۳) $\mathbb{R}-[-2,2]$ ۴) $\mathbb{R}-[-1,1]$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۵۲ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

باید همهٔ عبارت‌های زیر رادیکال‌ها نامنفی باشند، یعنی:

$$(9-x^2)\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 9 \Rightarrow -3\leq x\leq 3$$

$$(\sqrt{(9-x^2)})^2-8\geq 0 \Rightarrow 9-x^2-8\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 1 \Rightarrow -1\leq x\leq 1$$

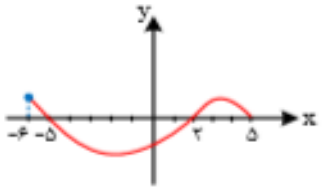
اشتراک این دو بازه، دامنهٔ تابع را تشکیل می‌دهد. پس:

$$[-3,3]\cap[-1,1]=[-1,1]$$

تذکر مهم: همواره دامنهٔ تابع را قبل از ساده کردن باید مشخص کرد.

گروه آموزشی ماز

۶۸- اگر شکل مقابل، نمودار $y=f(x)$ باشد، دامنهٔ تابع $y=\sqrt{xf(x)}$ کدام است؟



۱) $\mathbb{R}-[-5,2]$
۲) $[-5,0]$
۳) $[-5,0]\cup[2,5]$
۴) $[-5,2]\cup\{5\}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۵۲ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

با توجه به نمودار، مشاهده می‌کنیم که $f(x)$ از -۶ تا -۵ مثبت، از -۵ تا ۲ منفی و از ۲ تا ۵ مثبت است و طبق جدول زیر، $f(x)$ را در دامنه‌اش تعیین علامت می‌کنیم.

x	-۶		-۵		۲		۵
$f(x)$		$+$	۰	$-$	۰	$+$	

از طرفی می‌دانیم باید $xf(x) \geq ۰$ باشد تا $\sqrt{xf(x)}$ تعریف شود. حال جدول تغییرات $xf(x)$ را تشکیل می‌دهیم.

	-۶		-۵		۰		۲		۵
$f(x)$		$+$	۰	$-$		$-$	۰	$+$	
x		$-$		$-$	۰	$+$		$+$	
$xf(x)$		$-$	۰	$+$	۰	$-$	۰	$+$	

$\Rightarrow D=[-۵,۰]\cup[۲,۵]$

گروه آموزشی ماز

۶۹ - اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^۲-ax+b}{x-۲} & x\neq ۲\\ ۲c+۴ & x=۲\end{cases}$ یک تابع همانی باشد، حاصل $(a+b+c)$ کدام است؟

۱) -۲ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۱ ـ صفحه ۱۰۰ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

به ازای $x=۲$ باید $f(x)=۲$ باشد (f تابع همانی است)، پس $۲c+۴=۲$ و در نتیجه داریم $c=-۱$. از طرفی باید به ازای $x\neq ۲$: $\dfrac{x^۲-ax+b}{x-۲}=x$ و لذا داریم:

$$\frac{x^۲-ax+b}{x-۲}=x \rightarrow \cancel{x^۲}-ax+b=\cancel{x^۲}-۲x \Rightarrow \begin{cases}-a=-۲ \Rightarrow a=۲\\ b=۰\end{cases}$$

$$a+b+c=۲+۰+(-۱)=۱$$

گروه آموزشی ماز

۷۰ - اگر $f=\{(۲,۱),(-۶,۵),(-۵,۴),(۶,۷)\}$ و $g(x)=\sqrt[۳]{x}-x$ و $f(g(a))=۵$. در این صورت $a^۲+۱$ کدام است؟

۱) ۲۷ ۲) ۳۵ ۳) ۶۳ ۴) ۶۵

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۱ و ۱۲ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

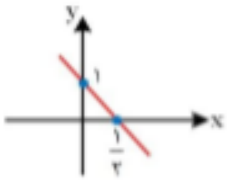
$$f(g(a))=f(\sqrt[۳]{a}-a)=۵$$

با توجه به تعریف f مشاهده می‌کنیم که $f(-۶)=۵$، پس:

$$\sqrt[۳]{a}-a=-۶ \xrightarrow{a=۸} a^۲+۱=۶۵$$

گروه آموزشی ماز

۷۱ - در صورتی که نمودار f مطابق شکل زیر باشد، دامنهٔ تعریف تابع با ضابطهٔ $y=\sqrt{f(۲x+۱)-f(x+۳)}$ کدام است؟



۱) $(۱,+\infty)$
۲) $[۲,+\infty)$
۳) $(-\infty,۱]$
۴) $(-\infty,۲]$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۵۲ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

با توجه به شکل، ابتدا معادلهٔ خط داده شده را می‌یابیم:

$A\left(\frac{1}{2}, 0\right), B\left(0, 1\right) \Rightarrow y = ax + b \begin{cases} 0 = -\frac{1}{2}a + b \\ 1 = a \times 0 + b \rightarrow b = 1 \rightarrow a = -2 \end{cases}$ روی خط هستند.

معادلهٔ خط : $y = -2x + 1$

حال برای آن که $y = \sqrt{f(2x+1) - f(x+2)}$ تعریف شود، باید عبارت زیر رادیکال منفی نباشد، پس:

$f(2x+1) - f(x+2) \geq 0 \Rightarrow [-2(2x+1)+1] - [-2(x+2)+1] \geq 0$

$\Rightarrow (-4x-1) - (-2x-5) \geq 0 \Rightarrow -2x + 4 \geq 0 \Rightarrow -2x \geq -4 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow D_y = (-\infty, 2]$

گروه آموزشی ماز

۷۲ - به ازای کدام مقدار a، برد تابع $f(x) = (x-a) \times \frac{|x|}{x}$، مجموعهٔ اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ است؟

۱) $a > 0$ ۲) $a < 0$ ۳) $-2 < a \leq -1$ ۴) هیچ مقدار a

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۱ ـ صفحه ۱۰۸ ـ دشوار)

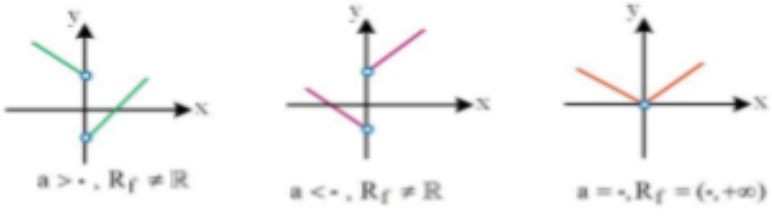
پاسخ تشریحی:

ابتدا f را به صورت یک تابع دو ضابطه‌ای می‌نویسیم:

(می‌دانیم برای هر $x \geq 0$ همواره $|x| = x$ و برای هر $x < 0$ همواره $|x| = -x$)

$$f(x) = \begin{cases} x - a & x > 0 \\ -x + a & x < 0 \end{cases}$$

پس برحسب این که $a > 0$ یا $a < 0$ یا $a = 0$، نمودار تابع f به یکی از صورت‌های زیر است:



گروه آموزشی ماز

۷۳ - اگر $f(x) = \frac{3x+1}{2x-1}$، مقدار $f^{-1}(f(1)+2)$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{15}$ ۲) $\frac{7}{8}$ ۳) $\frac{7}{9}$ ۴) $\frac{8}{7}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۲۴ تا ۲۹ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

ابتدا ضابطهٔ $f^{-1}(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$y=\frac{2x+1}{2x-1}\Rightarrow 2xy-y=2x+1\Rightarrow 2xy-2x=y+1$$

$$\Rightarrow x(2y-2)=y+1\Rightarrow x=\frac{y+1}{2y-2}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x+1}{2x-2}$$

$$f(1)=\frac{2\times1+1}{2\times1-1}=4\Rightarrow f^{-1}\big(f(1)+2\big)=f^{-1}(4+2)=f^{-1}(6)$$

$$f^{-1}(6)=\frac{6+1}{9}=\frac{7}{9}$$

گروه آموزشی ماز

۷۴ - اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^2-2ax$ در بازهٔ $[3,+\infty)$ یک به یک باشد، حداکثر مقدار a کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۲ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۵۹ تا ٦٤ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم اگر $S\left|\begin{matrix}x_0\\y_0\end{matrix}\right.$ رأس سهمی باشد، همواره سهمی در هر یک از بازه‌های $(-\infty,x_0]$ و $[x_0,+\infty)$ یک به یک است و چون تابع $y=x^2-2ax$ در بازه $[3,+\infty)$ یک به یک است، طول نقطهٔ رأس سهمی همان ۳ است. از طرفی برای معادله درجه دوم $y=ax^2+bx+c$ داریم $x_S=\frac{-b}{2a}$، پس:

$$-\frac{-2a}{2}=3\Rightarrow a=3$$

گروه آموزشی ماز

۷۵ - ضابطهٔ معکوس تابع $f(x)=4-\sqrt{x+2}$ کدام است؟

۱) $f^{-1}(x)=x^2-8x+16;\ x\le3$ ۲) $f^{-1}(x)=x^2-8x+14;\ x\le3$

۳) $f^{-1}(x)=x^2-8x+14;\ x\le4$ ۴) $f^{-1}(x)=x^2-8x+16;\ x\le4$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۲۴ تا ۲۹ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

ابتدا x را برحسب y به دست می‌آوریم:

$$y=4-\sqrt{x+2}\Rightarrow\sqrt{x+2}=4-y\quad(1)$$

می‌دانیم $\sqrt{x+2}\ge0$، پس باید $4-y\ge0$ یا $y\le4$

$$y\le4\xrightarrow{\text{دو طرف (۱) به توان ۲}}x+2=(4-y)^2\Rightarrow x+2=y^2-8y+16$$

$$\Rightarrow x=y^2-8y+14\Rightarrow\begin{cases}f^{-1}(x)=x^2-8x+14\\x\le4\end{cases}$$

$y\le4$

گروه آموزشی ماز

۷۶ - نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{3x+7}{x-3}$ مفروض است. طول نقاط تلاقی f با f^{-1} کدام است؟

۱) $x=-1,\ x=7$ ۲) $x=1,\ x=-7$ ۳) $\mathbb{R}-\{-7\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{3\}$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۲۴ تا ۲۹ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی

با توجه به این که محل تلاقی خط $y=x$ با نمودار، ممکن است همهٔ نقاط تلاقی تابعی چون f را با f^{-1} مشخص نکند، مطمئن‌ترین راه محاسبهٔ ضابطهٔ f^{-1} و قطع دادن آن با f است.

$$y=\frac{3x+7}{x-3}\Rightarrow xy-3y=3x+7\Rightarrow xy-3x=3y+7\Rightarrow x(y-3)=3y+7\Rightarrow x=\frac{3y+7}{y-3}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{3x+7}{x-3}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، f و f^{-1} بر هم منطبق بوده و لذا تقاط تلاقی آن‌ها یا تقاط مشترکشان $\mathbb{R}-\{3\}$ است و اگر f را با $y=x$ قطع می‌دادیم، به دو نقطه با طول‌های $x=-1$ و $x=7$ می‌رسیدیم.

گروه آموزشی ماز

۷۷ - اگر $f=\{(2,1),(3,2),(4,-1),(5,5)\}$ و $g=\{(2,2),(5,2),(4,4),(7,1)\}$، در این صورت $(g^{-1}of^{-1})+g^{-1}$ کدام است؟

۱) $\{(1,7),(2,10)\}$ ۲) $\{(1,10),(2,8)\}$ ۳) $\{(1,7),(2,10),(3,9)\}$ ۴) $\{(2,8),(1,9),(3,7)\}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۲۴ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی

ابتدا f^{-1} و g^{-1} را از روی f و g به دست آورده و سپس آن‌ها را با هم ترکیب می‌کنیم:

$$g^{-1}=\{(2,2),(2,5),(4,4),(1,7)\}$$

$$f^{-1}=\{(1,2),(2,3),(-1,4),(5,5)\}$$

$$g^{-1}of^{-1}=\{(1,2),(2,5),(-1,4)\}$$

در ادامه برای محاسبهٔ $(g^{-1}of^{-1})+g^{-1}$ و با توجه به رابطهٔ $(f+g)(a)=f(a)+g(a)$ داریم:

$$h=g^{-1}of^{-1}=\{(1,2),(2,5),(-1,4)\}$$
$$g^{-1}=\{(2,2),(2,5),(4,4),(1,7)\}$$
$$\Rightarrow D_h\cap D_{g^{-1}}=\{1,2\}$$

$$(h+g^{-1})(1)=h(1)+g^{-1}(1)=2+7=9$$

$$(h+g^{-1})(2)=h(2)+g^{-1}(2)=5+3=8$$

$$\Rightarrow h+g^{-1}=\{(1,9),(2,8)\}$$

گروه آموزشی ماز

۷۸ - اگر $f(x)=\sqrt{x-1}$ و $g(x)=\log(x^2+3x)$، در این صورت دامنه fog کدام است؟

۱) $(-\infty,3]\cup(5,+\infty)$ ۲) $(-\infty,-2)\cup(5,+\infty)$

۳) $(-\infty,3]\cup[5,+\infty)$ ۴) $(-\infty,-5]\cup[2,+\infty)$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۱ تا ۱۴ و ۲۲ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی

با توجه به تعریف، $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$ و چون $D_f=[1,+\infty)$ و $g(x)\in D_f$، پس باید:

$$\log(x^2+3x)\geq 1\Rightarrow x^2+3x\geq 10\Rightarrow x^2+3x-10\geq 0$$

$$\Rightarrow (x+5)(x-2)\geq 0\Rightarrow x\leq -5 \text{ یا } x\geq 2 \quad (1)$$

از طرفی باید $x^2+3x>0$ تا $\log(x^2+3x)$ تعریف شود:

$$x^2+3x>0\Rightarrow x(x+3)>0\Rightarrow x<-3 \text{ یا } x>0 \quad (2)$$

$$(1),(2)\Rightarrow D_{fog}=(-\infty,-5]\cup[2,+\infty)$$

گروه آموزشی ماز

۷۹ - اگر $f(x+1)=\frac{x^2+3x-7}{x+3}$. در این صورت مقدار $fof(-1)$ کدام است؟

۱) -9 ۲) -7 ۳) $-\frac{7}{9}$ ۴) $\frac{15}{7}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۱ و ۱۲ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

ابتدا ضابطهٔ f را به دست می‌آوریم:

$$(x+1)=k \Rightarrow x=k-1 \Rightarrow f(k)=\frac{(k-1)^2+3(k-1)-7}{(k-1)+3} \Rightarrow f(k)=\frac{k^2+k-9}{k+2} \Rightarrow f(x)=\frac{x^2+x-9}{x+2}$$

$$f(-1)=\frac{(-1)^2+(-1)-9}{(-1)+2}=\frac{-9}{1}=-9$$

$$fof(-1)=f\left(f(-1)\right)=f(-9)=\frac{63}{-7}=-9$$

گروه آموزشی ماز

۸۰ - اگر $f(x)=\frac{x+3}{x-2}$ و $g=\{(2,-1),(3,2),(-1,4)\}$. در این صورت حاصل‌ضرب اعضای دامنهٔ تابع (gof) کدام است؟

۱) $13/75$ ۲) $-13/75$ ۳) $-15/75$ ۴) $16/75$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۳ تا ۱۵ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$gof(x)=g\left(f(x)\right)$$

پس باید $f(x)$ ها در دامنهٔ g باشند:

$$f(x)=2 \Rightarrow \frac{x+3}{x-2}=2 \Rightarrow x+3=2x-4 \Rightarrow x=7$$

$$f(x)=3 \Rightarrow \frac{x+3}{x-2}=3 \Rightarrow x+3=3x-6 \Rightarrow x=\frac{9}{2}$$

$$f(x)=-1 \Rightarrow \frac{x+3}{x-2}=-1 \Rightarrow x+3=-x+2 \Rightarrow x=-\frac{1}{2}$$

$$D_{gof}=\left\{x\in D_f \,\middle|\, f(x)\in D_g\right\}=\left\{7,\frac{9}{2},-\frac{1}{2}\right\}$$

$$7\times\frac{9}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{-63}{4}=-15/75$$

گروه آموزشی ماز

۸۱ - اگر نمودار تابع با ضابطه $f(x)=|x+3|-1$ را ۳ واحد به سمت راست و ۲ واحد به سمت پایین انتقال دهیم، به تابعی چون g خواهیم رسید. مجموع طول و عرض نقطه تلاقی f و g کدام است؟

۱) صفر ۲) -1 ۳) -2 ۴) -3

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۱ ـ صفحه ۱۱۱ تا ۱۱۶ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

برای یافتن ضابطهٔ g کافی است ابتدا در ضابطهٔ f ، x را به $(x-3)$ تبدیل کرده و سپس ضابطهٔ حاصل را با (-2) جمع کنیم.

$$g(x)=|x-3+3|-1-2 \Rightarrow g(x)=|x|-3$$

حال برای یافتن مختصات نقاط تلاقی باید قرار دهیم $f(x)=g(x)$ که خواهیم داشت:

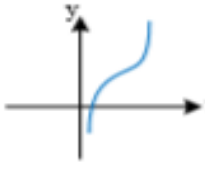
$$|x+3|-1=|x|-3 \Rightarrow |x+3|-|x|+2=0$$

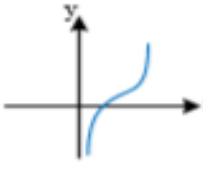
$$\begin{cases} -3\le x\le 0 \to x+3+x+2=0 \to 2x=-5 \to x=-\frac{5}{2} \to y=\left|-\frac{5}{2}\right|-3 \to y=-\frac{1}{2} \\ x<-3 \to -x-3+x+2=0 \to -1=0 \quad \text{غیرقابل قبول} \\ x>0 \to x+3-x+2=0 \to 5=0 \quad \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

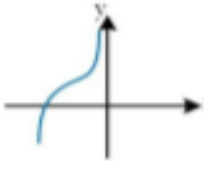
پس فقط $A\left|\begin{matrix}-\frac{5}{2}\\ -\frac{1}{2}\end{matrix}\right.$ نقطه تلاقی f و g است که مجموع طول و عرض این نقطه $(-\frac{5}{2})+(-\frac{1}{2})=-3$ است.

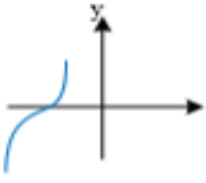
گروه آموزشی ماز

۸۲- نمودار منحنی به معادلهٔ $y=x^3+6x^2+12x+10$ شبیه کدام است؟

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۳ تا ۵ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

ضابطه یا معادلهٔ تابع داده شده را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y=x^3+6x^2+12x+8+2=(x+2)^3+2$$

لذا برای رسم آن کافی است منحنی $y=x^3$ را ابتدا ۲ واحد به چپ و سپس ۲ واحد به سمت بالا انتقال دهیم؛ پس گزینه (۳) شبیه آن است.

گروه آموزشی ماز

۸۳- تابع با دامنهٔ $\mathbb{R}$ با ضابطهٔ $y=f(x)$ اکیداً صعودی است. دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{f(2x+2)-f(x-1)}$ کدام است؟

۱) $[-3,+\infty)$ ۲) $(-3,+\infty)$ ۳) $[-1,+\infty)$ ۴) $(-1,+\infty)$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۷ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

طبق تعریف، اگر f تابعی اکیداً صعودی باشد، از تامساوی $f(x_1)<f(x_2)$ می‌توان نتیجه گرفت که باید $x_1<x_2$. حال با توجه به ضابطهٔ g باید عبارت زیر رادیکال بزرگتر یا مساوی صفر باشد، پس داریم:

$$f(2x+2)-f(x-1)\ge 0 \Rightarrow f(2x+2)\ge f(x-1) \xrightarrow{\text{f اکیداً صعودی}} 2x+2\ge x-1 \Rightarrow x\ge -3$$

و چون دامنهٔ f، $\mathbb{R}$ می‌باشد، پس $f(2x+2)$ و $f(x-1)$ نیز دامنهٔ $\mathbb{R}$ داشته و دامنهٔ g همان $[-3,+\infty)$ است.

۸۴- با فرض $f(x)=x^3-6x^2+12x$، مقدار تابع $g(x)=x^2-x+2g(2)$ به ازای $x=f(2-\sqrt[3]{9})$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -2

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۱ ـ صفحه ۱۰۷ و ۱۰۸ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

ابتدا با توجه به معلوم نبودن $g(2)$ در عبارت $g(x)=x^2-x+2g(2)$، با جای‌گذاری $x=2$ در این عبارت مقدار آن را به دست می‌آوریم:

$$g(x)=x^2-x+2g(2)\xrightarrow{x=2}g(2)=4-2+2g(2)\Rightarrow g(2)=-2$$

در نتیجه ضابطه تابع g به صورت $g(x)=x^2-x-4$ است. حالا باید مقدار $f(2-\sqrt[3]{9})$ را به دست آوریم:

$$f(x)=x^3-6x^2+12x\Rightarrow f(x)=\underbrace{x^3-6x^2+12x-8}_{(x-2)^3}+8\Rightarrow f(x)=(x-2)^3+8$$

$$\xrightarrow{x=2-\sqrt[3]{9}}f(2-\sqrt[3]{9})=(2-\sqrt[3]{9}-2)^3+8=-9+8=-1$$

در آخر خواسته مسئله یعنی $g(-1)$ برابر است با:

$$g(x)=x^2-x-4\xrightarrow{x=-1}g(-1)=(-1)^2-(-1)-4=1+1-4=-2$$

گروه آموزشی ماز

۸۵- دامنه تابع خطی $y=\sqrt[3]{x^3+ax^2+bx-8}$ به صورت $[a,b]$ است. برد این تابع کدام است؟

۱) $[-6,12]$ ۲) $[-8,10]$ ۳) $[-4,14]$ ۴) $[0,10]$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۱ ـ صفحه ۱۰۱ تا ۱۰۵ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

اگر تابع $y=\sqrt[3]{x^3+ax^2+bx-8}$ ضابطه یک تابع خطی باشد، باید عبارت زیر رادیکال مکعب کامل باشد. با توجه به عبارت x^3 و عدد -8 می‌توان نتیجه گرفت عبارت زیر رادیکال $(x-2)^3$ یعنی $x^3-6x^2+12x-8$ است. پس: $a=-6$ و $b=12$ می‌باشند و داریم: $y=\sqrt[3]{(x-2)^3}=x-2$

چون طبق فرض مسئله دامنه تابع $[-6,12]$ است برای به دست آوردن برد تابع می‌توان نوشت:

$$-6\le x\le 12\xrightarrow{-2}-8\le x-2\le 10\Rightarrow -8\le y\le 10$$

در نتیجه برد تابع $[-8,10]$ است.

گروه آموزشی ماز

۸۶- با فرض $f(x)=2x+[x]$ و $g(x)=[x]-x-2$، اگر تابع $y=(f+g)(x)$ با دامنه $[a,b]$ تابع همانی باشد، $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) ۲ ۴) -2

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱ ـ صفحه ۱۱۰ / ریاضی ۲ ـ صفحه ۵۴ تا ۵۶ و ۶۵ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

طبق فرض مسئله $y=(f+g)(x)$ تابع همانی است. پس داریم:

$$(f+g)(x)=x\Rightarrow f(x)+g(x)=x\Rightarrow 2x+[x]+[x]-x-2=x$$

$$\cancel{x}+2[x]-2=\cancel{x}\Rightarrow 2[x]=2\Rightarrow [x]=1\Rightarrow 1\le x<2$$

در نتیجه مطلوب مسئله $[1,2)$ است و $a+b=3, b=2, a=1$ می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۸۷- اگر دامنه تابع $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2x^2+(\log_c^a)x+ab}$ به صورت $\mathbb{R}-\{-1\}$ باشد، b کدام است؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{8}$ ۳) $\frac{1}{12}$ ۴) $\frac{1}{16}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۵۰ و ۵۱ و ۱۱۱ و ۱۱۲ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

دامنه توابع کسری به صورت {ریشه(های) مخرج} − $\mathbb{R}$ است و چون طبق فرض مسئله دامنه تابع $\mathbb{R}-\{-1\}$ است پس $x=-1$ ریشه مخرج کسر است و چون مخرج کسر عبارت درجه دوم $2x^2+(\log_2^a)x+ab$ می‌باشد، در نتیجه این عدد ریشه مضاعف معادله $2x^2+(\log_2^a)x+ab=0$ است. بنابراین می‌توان نوشت:

$$2(x+1)^2=0 \Rightarrow 2(x^2+2x+1)=0 \Rightarrow 2x^2+4x+2=0$$

با مقایسه معادله به دست آمده با معادله $2x^2+(\log_2^a)x+ab=0$ برای محاسبه a و b داریم:

$$\log_2^a=4 \Rightarrow a=2^4 \Rightarrow a=16$$

$$ab=2 \xrightarrow{a=16} 16b=2 \Rightarrow b=\frac{1}{8}$$

گروه آموزشی ماز

۸۸- با فرض $f(x)=x-\sqrt{3-x}$ و $g(x)=x+\sqrt{3-x}$، تعداد جواب‌های معادله $(f.g)(x)=5x+2$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۶۵ و ۶۷ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

دامنه توابع $f(x)=x-\sqrt{3-x}$ و $g(x)=x+\sqrt{3-x}$ از حل نامعادله $3-x\geq 0$ به دست می‌آید. پس دامنه هر دو تابع $x\leq 3$ است و چون دامنه تابع $f\times g$ از اشتراک دامنه دو تابع به دست می‌آید، پس دامنه این تابع نیز $x\leq 3$ است و داریم:

$$(f.g)(x)=5x+2 \Rightarrow f(x).g(x)=5x+2 \Rightarrow \underbrace{(x-\sqrt{3-x})(x+\sqrt{3-x})}_{\text{مزدوج}}=5x+2 \Rightarrow x^2-(3-x)=5x+2$$

$$\Rightarrow x^2-3+x=5x+2 \Rightarrow x^2-4x-5=0 \Rightarrow (x-5)(x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \checkmark \\ x=5 \times \end{cases}$$

توجه داشته باشید xهای کوچک‌تر یا مساوی عدد ۳ قابل قبول هستند پس معادله فقط یک جواب دارد.

گروه آموزشی ماز

۸۹- قرینه نمودار تابع $y=\sqrt{2x+3}$ را نسبت به محور yها تعیین کرده و سپس ۱ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم. اگر تابع به وجود آمده از این فرآیند را $f(x)$ بنامیم، فاصله نقطه تلاقی نمودار f و خط $y=x+5$ از نقطه $(1,-1)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۸ تا ۲۳ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

ابتدا با توجه به فرایند گفته شده ضابطه تابع f را به دست می‌آوریم. داریم:

$$y=\sqrt{2x+3} \xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور yها}} y=\sqrt{-2x+3} \xrightarrow[x\to x-1]{\text{۱ واحد راست}} f(x)=\sqrt{-2(x-1)+3} \Rightarrow f(x)=\sqrt{-2x+5}$$

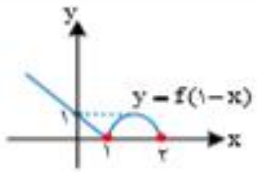
برای به دست آوردن نقطه تلاقی نمودار f و خط $y=x+5$ باید معادله $f(x)=x+5$ را حل کنیم. می‌توان نوشت:

$$\sqrt{-2x+5}=x+5 \xrightarrow{\text{توان ۲}} -2x+5=x^2+10x+25 \Rightarrow x^2+12x+20=0 \Rightarrow (x+2)(x+10)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-2 \checkmark \rightarrow A(-2,3) \\ x=-10 \times \end{cases}$$

در آخر فاصله نقطه $A(-2,3)$ از نقطه $B(1,-1)$ برابر است با:

$$AB=\sqrt{(-2-1)^2+(3-(-1))^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5$$

۹۰- اگر نمودار تابع $y=f(1-x)$ به صورت مقابل باشد، تعداد جواب‌های معادلهٔ $x^2+f(x)=1$ کدام است؟

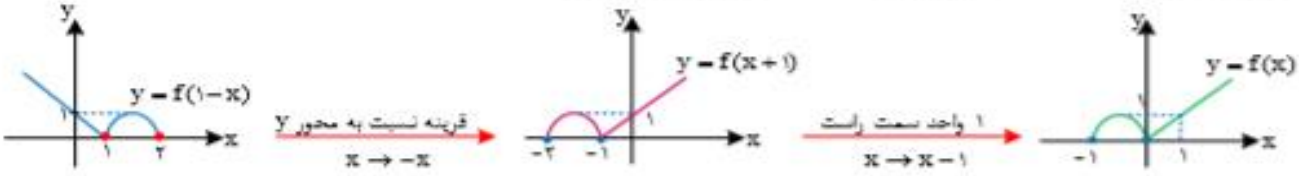


۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

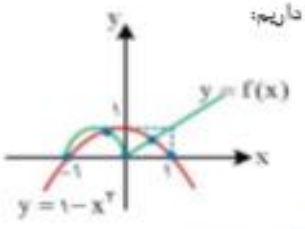
پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۸ تا ۲۳ ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

ابتدا از روی نمودار تابع $y=f(1-x)$، نمودار تابع $y=f(x)$ را رسم می‌کنیم. ببینید:



حالا برای به دست آوردن جواب‌های معادله $x^2+f(x)=1$ ابتدا آن را به صورت $f(x)=1-x^2$ در نظر گرفته و سپس نمودار دو تابع $y=f(x)$ و $y=1-x^2$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. تعداد نقاط برخورد نمودار دو تابع، تعداد جواب‌های معادله است. داریم:



همانطور که مشاهده می‌کنید نمودار دو تابع همدیگر را در ۳ نقطه قطع می‌کنند در نتیجه معادله ۳ جواب دارد.

گروه آموزشی ماز

۹۱- تعداد جواب‌های معادله $2\left|x^2|x|-1\right|=1$ کدام است؟

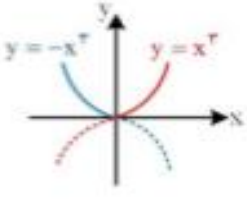
۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۳ تا ۵ و ۱۷ ـ متوسط)

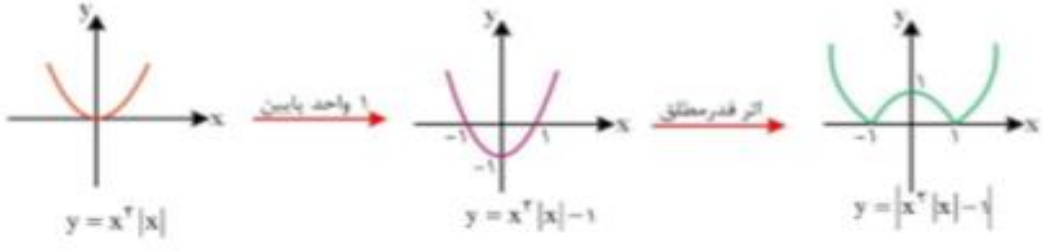
پاسخ تشریحی:

ابتدا نمودار تابع $y=x^2|x|$ را رسم می‌کنیم. پس داریم:

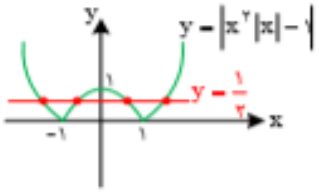
$$x^2|x|=\begin{cases}x^3 & x\geq 0\\ -x^3 & x<0\end{cases}$$



حالا نمودار تابع $y=\left|x^2|x|-1\right|$ را از روی نمودار $y=x^2|x|$ رسم می‌کنیم. ببینید:



در آخر برای به دست آوردن تعداد جواب‌های معادله $2|x^2|x|-1|-1=\frac{1}{2}$ یا $|x^2|x|-1|=1$ داریم:



در نتیجه معادله ۴ جواب متمایز دارد.

گروه آموزشی ماز

۹۲- اگر $f(x)=x^2-x$ باشد، حاصل‌ضرب جواب‌های معادله $fof(x)=6$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳- ۳) ۲ ۴) ۲-

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۱ و ۱۲ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

طبق فرض مسئله $f(f(x))=6$ است پس ابتدا معادله $f(x)=6$ را حل می‌کنیم. داریم:

$$f(x)=6\Rightarrow x^2-x=6\Rightarrow x^2-x-6=0\Rightarrow (x-3)(x+2)=0\Rightarrow x=3, x=-2$$

یعنی $f(3)=6$ و $f(-2)=6$ هستند، پس باید هر یک از معادلات $f(x)=3$ و $f(x)=-2$ را حل کنیم و حاصل‌ضرب جواب‌های معادله را در صورت وجود به دست آوریم. پس می‌توان نوشت:

$$f(x)=3\Rightarrow x^2-x=3\Rightarrow x^2-x-3=0\xrightarrow{\Delta>0} P=\frac{c}{a}=-3$$

$$f(x)=-2\Rightarrow x^2-x=-2\Rightarrow x^2-x+2=0\xrightarrow{\Delta<0}$$ ریشه ندارد.

گروه آموزشی ماز

۹۳- اگر $f(x)=x-3\left[\frac{x}{3}\right]-1$ و $g(x)=x^2-2x$ باشند، برد تابع $gof(x)$ کدام است؟

۱) $[-1,2)$ ۲) $[-1,3]$ ۳) $(0,3]$ ۴) $[0,3]$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۵۴ و ۵۵ / ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۱ تا ۱۴ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

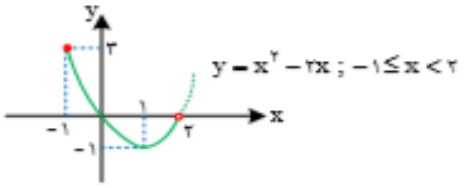
ابتدا برد تابع f را با توجه به این که می‌دانیم $0\le O-[O]<1$ است، به دست می‌آوریم.

داریم:

$$f(x)=x-3\left[\frac{x}{3}\right]-1=3(\frac{x}{3})-3\left[\frac{x}{3}\right]-1=3(\frac{x}{3}-\left[\frac{x}{3}\right])-1$$

$$0\le\frac{x}{3}-\left[\frac{x}{3}\right]<1\xrightarrow{\times 3}0\le 3(\frac{x}{3}-\left[\frac{x}{3}\right])<3\xrightarrow{-1}-1\le 3(\frac{x}{3}-\left[\frac{x}{3}\right])-1<2$$

در نتیجه برد تابع f به صورت $[-1,2)$ است و برای به دست آوردن برد تابع $gof(x)$ نمودار تابع $g(x)=x^2-2x$ را رسم کرده و برد تابع f را به عنوان دامنه آن در نظر می‌گیریم. پس می‌توان نوشت:



همان‌طور که مشاهده می‌کنید برد تابع $[-1,3]$ است.

گروه آموزشی ماز

۹۴- اگر $f(x+2)=x^2-3$ و $f(g(x))=x^2+2x-2$ باشند، ضابطه تابع $(f+g)(x)$ کدام گزینه می‌تواند باشد؟

۱) x^2+5x-2 ۲) x^2-5x+2 ۳) x^2+3x-4 ۴) x^2-3x-4

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ٦٥ و ٦٧ / ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۳ و ١٤ ـ دشوار)

پ

پاسخ تشریحی:

ابتدا ضابطه تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم. داریم:

$$x+2=t \Rightarrow x=t-2, f(t)=(t-2)^2-2 \Rightarrow f(t)=t^2-4t+4-2 \Rightarrow f(t)=t^2-4t+1$$

در نتیجه $f(x)=x^2-4x+1$ و $f(g(x))=g^2(x)-4g(x)+1$ است و چون طبق فرض مسئله $f(g(x))=x^2+2x-2$ می‌باشد، با برابر قرار دادن سمت راست این دو تساوی ضابطه $g(x)$ را به دست می‌آوریم. پس می‌توان نوشت:

$$g^2(x)-4g(x)+1=x^2+2x-2 \xrightarrow{+3} g^2(x)-4g(x)+4=x^2+2x+1$$

$$\xrightarrow{\text{مربع کامل}} (g(x)-2)^2=(x+1)^2 \xrightarrow{\sqrt{\ }} |g(x)-2|=|x+1| \Rightarrow \begin{cases} g(x)-2=x+1 \to g(x)=x+3 \\ g(x)-2=-x-1 \to g(x)=-x+1 \end{cases}$$

در آخر خواسته مسئله یعنی $f(x)+g(x)$ برابر است با:

$$g(x)=x+3: f(x)+g(x)=x^2-4x+1+x+3=x^2-3x+4$$

$$g(x)=-x+1: f(x)+g(x)=x^2-4x+1-x+1=x^2-5x+2$$

با توجه به گزینه‌ها پاسخ درست گزینه ۲ می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۹۵ - مجموع طول نقاط برخورد نمودار تابع $f(x)=2-(x-2)^3$ و وارون آن، کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۳ ـ صفحه ٢٤ تا ٢٦ و ٢٩ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

ابتدا وارون تابع را به دست می‌آوریم:

$$y=2-(x-2)^3 \Rightarrow (x-2)^3=2-y \xrightarrow{\sqrt[3]{\ }} x-2=\sqrt[3]{2-y} \Rightarrow x=2+\sqrt[3]{2-y} \Rightarrow x=2-\sqrt[3]{y-2}$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=2-\sqrt[3]{x-2}$$

حالا باید معادله $f(x)=f^{-1}(x)$ را حل کنیم. پس داریم:

$$f(x)=f^{-1}(x) \Rightarrow \cancel{2}-(x-2)^3=\cancel{2}-\sqrt[3]{x-2} \Rightarrow (x-2)^3=\sqrt[3]{x-2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \to x=2 \\ x-2=1 \to x=3 \\ x-2=-1 \to x=1 \end{cases}$$

در نهایت مجموع جواب‌های معادله $2+3+1=6$ است.

گروه آموزشی ماز

۹۶ - با فرض $f(x)=\frac{1-x}{x-2}$، ضابطه تابع g کدام باشد تا دو تابع fog و gof همانی باشند؟

۱) $\frac{2x-1}{x-1}$ ۲) $\frac{2x+1}{x-1}$ ۳) $\frac{2x+1}{x+1}$ ۴) $\frac{2x-1}{x+1}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ٢٤ تا ٢٦ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم برای دو تابع وارون‌پذیر f و g اگر fog و gof تابع همانی باشند، می‌توان نتیجه گرفت این دو تابع وارون یکدیگر هستند. پس می‌توان گفت g وارون تابع f است و برای به دست آوردن ضابطه آن می‌توان نوشت:

$$y=\frac{1-x}{x-2} \Rightarrow 1-x=xy-2y \Rightarrow xy+x=2y+1 \Rightarrow x(y+1)=2y+1$$

$$\Rightarrow x=\frac{2y+1}{y+1} \Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{2x+1}{x+1}$$

در نتیجه $g(x)=\frac{2x+1}{x+1}$ است.

گروه آموزشی ماز

۹۷- نمودار تابع $y=||x+3|-|x-1||$ در بازهٔ $[a,b]$ اکیداً نزولی است. ضابطه وارون تابع در این بازه کدام است؟

۱) $-1-\frac{x}{2};\ 0\le x\le 4$

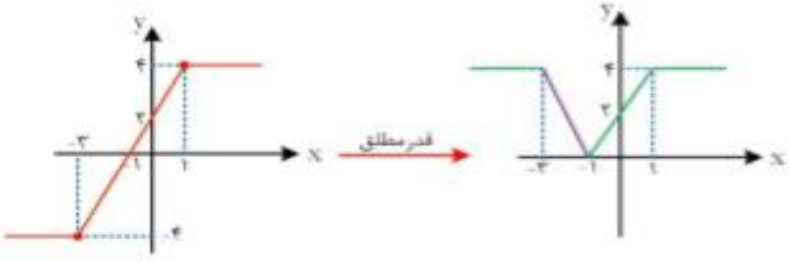
۲) $1-\frac{x}{2};\ 0\le x\le 4$

۳) $-1-\frac{x}{2};\ -3\le x\le -1$

۴) $1-\frac{x}{2};\ -3\le x\le -1$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۶۱ و ۶۲ / ریاضی ۳ ـ صفحه ۶ تا ۱۰ ـ متوسط)

ابتدا نمودار تابع $y=|x+3|-|x-1|$ را رسم کرده و سپس قدرمطلق را اثر می‌دهیم. پس داریم:



$y=|x+3|-|x-1|$ $\qquad$ $y=||x+3|-|x-1||$

همان‌طور که مشاهده می‌کنید نمودار تابع در بازهٔ $[-3,-1]$ اکیداً نزولی است و ضابطه تابع در این بازه به صورت $y=-2x-2$ است که برای محاسبه وارون آن می‌توان نوشت:

$$y=-2x-2\Rightarrow -2x=y+2\xrightarrow{\div(-2)}x=-1-\frac{y}{2}\xrightarrow{\text{تعویض جای } x \text{ و } y}y=-1-\frac{x}{2}$$

دامنه تابع وارون همان برد تابع است که با توجه به نمودار برابر $[0,4]$ است، پس پاسخ تست گزینه ۱ است.

گروه آموزشی ماز

۹۸- با فرض $f(x)=\frac{x-3}{x+1}$ و $(gof)^{-1}=\frac{x-1}{6}$، نمودار تابع $f(g(x))$ از کدام ناحیه محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) اول $\qquad$ ۲) دوم $\qquad$ ۳) سوم $\qquad$ ۴) چهارم

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۱ و ۱۲ ـ دشوار)

پاسخ تشریحی

طبق فرض مسئله $(gof)^{-1}(x)=\frac{x-1}{6}$ است. با وارون کردن این تابع ضابطه $gof(x)$ را به دست می‌آوریم. داریم:

$$y=\frac{x-1}{6}\Rightarrow x-1=6y\Rightarrow x=6y+1\Rightarrow gof(x)=6x+1$$

حالا با معلوم بودن $f(x)=\frac{x-3}{x+1}$ و $g(f(x))=6x+1$ می‌توان نتیجه گرفت $g(\frac{x-3}{x+1})=6x+1$ است و برای به دست آوردن ضابطه تابع g با استفاده از تغییر متغیر می‌توان نوشت:

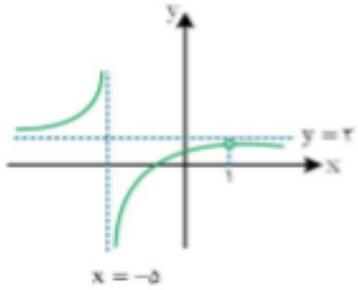
$$\frac{x-3}{x+1}=t\Rightarrow x-3=xt+t\Rightarrow x-xt=t+3\Rightarrow x(1-t)=t+3\Rightarrow x=\frac{t+3}{1-t}$$

$$\Rightarrow g(t)=6(\frac{t+3}{1-t})+1=\frac{6t+18}{1-t}+1=\frac{5t+19}{1-t}\Rightarrow g(x)=\frac{5x+19}{1-x}$$

در آخر ضابطه تابع $f(g(x))$ و نمودار آن را به دست می‌آوریم:

$$f(g(x))=f\left(\frac{5x+19}{1-x}\right)=\frac{\frac{5x+19}{1-x}-3}{\frac{5x+19}{1-x}+1}=\frac{\frac{8x+16}{\cancel{1-x}}}{\frac{4x+2-}{\cancel{1-x}}}=\frac{8x+16}{4x+2-}$$

$$=\frac{\cancel{4}(2x+4)}{\cancel{4}(x+5)}=\frac{2x+4}{x+5}$$



همان‌طور که مشاهده می‌کنید نمودار تابع از ناحیه چهارم محورهای مختصات نمی‌گذرد.

گروه آموزشی ماز

۹۹ - با فرض $f(x)=1+\sqrt[3]{x-2}$ و $g(x)=x^3-3x^2+3x$، نمودار تابع $f^{-1}og^{-1}(x)$ از کدام ناحیه محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۱ و ۱۲ و ۲۴ تا ۲۷ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم منظور از $f^{-1}og^{-1}(x)$ همان $(gof)^{-1}(x)$ است. پس ابتدا $gof(x)$ را به دست آورده و سپس ضابطهٔ وارون آن را تعیین می‌کنیم. داریم:

$$g(x)=x^3-3x^2+3x-1+1\Rightarrow g(x)=(x-1)^3+1$$

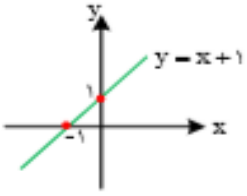
$$gof(x)=g(f(x))=g(1+\sqrt[3]{x-2})=(\cancel{1}+\sqrt[3]{x-2}-\cancel{1})^3+1$$

$$=x-2+1\Rightarrow gof(x)=x-1$$

حالا باید وارون این تابع خطی را به دست آوریم:

$$y=x-1\Rightarrow x=y+1\Rightarrow (gof)^{-1}(x)=x+1$$

نمودار این تابع به صورت زیر است و همان‌طور که مشاهده می‌کنید از ناحیه چهارم محورهای مختصات عبور نمی‌کند. ببینید:



گروه آموزشی ماز

۱۰۰ - اگر x_1 و x_2 جواب‌های معادله $10^{x^2-x}=2$ باشند، $x_1+x_1x_2+x_2$ کدام است؟

۱) $\log 20$ ۲) $\log 50$ ۳) $\log 2$ ۴) $\log 5$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۱۱ تا ۱۱۴ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

از طرفین معادله $10^{x^2-x}=2$ در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم. پس داریم:

$$10^{x^2-x}=2\xrightarrow{\log}\log 10^{x^2-x}=\log 2\Rightarrow x^2-x=\log 2\Rightarrow x^2-x-\log 2=0$$

می‌دانیم در معادله درجه دوم $ax^2+bx+c=0\ (\Delta>0)$، $x_1+x_2=\frac{-b}{a}$ و $x_1x_2=\frac{c}{a}$ هستند و در نتیجه برای محاسبه خواسته مسئله می‌توان نوشت:

$$(x_1+x_2)+x_1x_2=S+P=1-\log 2=\log 5$$

گروه آموزشی ماز

۱۰۱- نمودار توابع $f(x)=a^x$ و $g(x)=(1-2a)^{-x}$ نسبت به محور yها قرینه هستند. فاصله نقطه تلاقی تابع $g(x)$ و تابع $y=f(x)-\frac{8}{3}$ از نقطه $(-1,1)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{2}{3}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۹۷ تا ۱۰۲ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

به عنوان یک نکته مهم بلد باشید دو تابع نمایی $y=a^x$ و $y=b^x$ زمانی نسبت به محورyها قرینه هستند که a و b معکوس همدیگر باشند، یعنی حاصل‌ضرب آن‌ها ۱ باشد. پس برای دو تابع $f(x)=a^x$ و $g(x)=(\frac{1}{1-2a})^x$ می‌توان نوشت:

$$a(\frac{1}{1-2a})=1 \Rightarrow \frac{a}{1-2a}=1 \Rightarrow 1-2a=a \Rightarrow 3a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

پس $f(x)=(\frac{1}{3})^x$ و $g(x)=3^x$ هستند و برای به دست آوردن نقطه تلاقی تابع $g(x)$ و $f(x)-\frac{8}{3}$ باید معادله $g(x)=f(x)-\frac{8}{3}$ را حل کنیم. داریم:

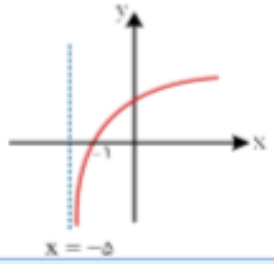
$$3^x=(\frac{1}{3})^x-\frac{8}{3} \xrightarrow{3^x=t} t=\frac{1}{t}-\frac{8}{3} \xrightarrow{\times 3t} 3t^2=3-8t$$

$$\Rightarrow 3t^2+8t-3=0 \Rightarrow (t+3)(3t-1)=0 \Rightarrow \begin{cases} t=-3: 3^x=-3 \ \times \\ t=\frac{1}{3}: 3^x=\frac{1}{3} \rightarrow x=-1 \ \checkmark \end{cases}$$

در نتیجه نقطه برخورد دو تابع $A(-1,\frac{1}{3})$ است، که فاصله آن از نقطه $(-1,1)$ با توجه به هم طول بودن دو نقطه برابر با $\frac{2}{3}$ است.

گروه آموزشی ماز

۱۰۲- نمودار وارون تابع $f(x)=a+3^{x-b}$ به صورت مقابل است. حاصل $f(\log_3^2)$ کدام است؟

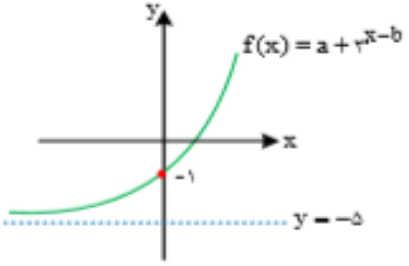


۱) ۷
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۲

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۱۱۵ و ۱۱۶ / ریاضی ۳ ـ صفحه ۲۴ و ۲۷ و ۲۸ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم نمودار یک تابع و وارون آن نسبت به خط $y=x$ (نیمساز ناحیه‌های اول و سوم) قرینه هستند پس نمودار تابع f به صورت زیر است:



با توجه به نمودار رسم شده به وضوح $a=-5$ است. پس ضابطه تابع $f(x)=-5+3^{x-b}$ می‌باشد و چون عرض از مبدأ نمودار تابع ۱- است، برای محاسبه مقدار b می‌توان نوشت:

$$f(0)=-1 \Rightarrow -5+3^{-b}=-1 \Rightarrow 3^{-b}=4 \Rightarrow b=-2$$

پس ضابطه تابع به صورت $f(x)=-5+3^{x+2}$ یا $f(x)=-5+9(3^x)$ است. برای محاسبه $f(\log_3^7)$ داریم:

$$f(\log_3^7)=-5+9(3^{\log_3^7})=-5+9(7)=63-5=58$$

گروه آموزشی ماز

۱۰۳- با فرض $f(x)=\log_3^{x+1}-1$. تابع $y=\left|f^{-1}(x)\right|$ در بازهٔ $[a,+\infty)$ اکیداً صعودی است. کمترین مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۱- ۳) ۲ ۴) ۲-

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۹۷ تا ۱۰۱ / ریاضی ۳ ـ صفحه ۶ تا ۱۰ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

ابتدا وارون تابع $f(x)=\log_3^{x+1}-1$ را به دست می‌آوریم. داریم:

$$y=\log_3^{x+1}-1\Rightarrow\log_3^{x+1}=y+1\Rightarrow x+1=3^{y+1}\Rightarrow x=3^{y+1}-1\xrightarrow{\text{تعویض جای x و y}}f^{-1}(x)=3^{x+1}-1$$

حالا نمودار تابع $y=\left|3^{x+1}-1\right|$ را رسم می‌کنیم. ببینید:

همان‌طور که مشاهده می‌کنید تابع در بازهٔ $[-1,+\infty)$ اکیداً صعودی است و در نتیجه کمترین مقدار a برابر با ۱- است.

گروه آموزشی ماز

۱۰۴- اگر $f(x)=(ax+2)(b-x)-7x^2$ ضابطهٔ یک تابع ثابت باشد، برد تابع f کدام است؟

۱) $-\frac{2}{7}$ ۲) $\frac{2}{7}$ ۳) $-\frac{4}{7}$ ۴) $\frac{4}{7}$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱ ـ فصل ۵)

نکته:

ضابطه تابع ثابت به صورت $f(x)=c$ است که $c\in\mathbb{R}$ بوده و داریم: $\begin{cases}D_f=\mathbb{R}\\R_f=\{c\}\end{cases}$

به عبارت دیگر دامنه تابع ثابت $f(x)=c$ در حالت کلی برابر مجموعه اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ و برد آن مجموعه تک عضوی $\{c\}$ است.

پاسخ تشریحی:

ابتدا ضابطه تابع f را به صورت زیر بازنویسی کرده و آن را استاندارد می‌کنیم:

$$f(x)=(ax+2)(b-x)-7x^2=abx-ax^2+2b-2x-7x^2$$

$$\Rightarrow f(x)=-ax^2-7x^2+abx-2x+2b\Rightarrow f(x)=(-a-7)x^2+(ab-2)x+2b$$

می‌دانیم که تابع f، تابعی ثابت است، پس در ضابطه فوق، ضریب x^2 و نیز ضریب x باید برابر صفر باشد:

$$\begin{cases}-a-7=0\Rightarrow a=-7\\ab-2=0\xrightarrow{a=-7}-7b-2=0\Rightarrow b=-\frac{2}{7}\end{cases}$$

در نتیجه ضابطه تابع f به صورت زیر است:

$$f(x) = 2b \xrightarrow{b=-\frac{2}{7}} f(x) = -\frac{4}{7}$$

در نتیجه برد تابع f برابر $-\frac{4}{7}$ است.

گروه آموزشی ماز

۱۰۵- فرض کنید M نقطهٔ تلاقی منحنی $y=\sqrt{x+3}-1$ با تابع وارون خود باشد، فاصلهٔ نقطهٔ M از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\sqrt{2}$ ۳) ۲ ۴) $2\sqrt{2}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ فصل ۱)

نکته)

فاصله نقطه A به مختصات $A(x_A, y_A)$ از مبدأ مختصات برابر است با: $OA=\sqrt{x_A^2+y_A^2}$

تابع $y=\sqrt{x+3}-1$ یک تابع اکیداً صعودی است بنابراین محل برخورد این تابع با وارون خود، بر روی نیمساز ناحیه اول و سوم $(y=x)$ قرار دارد، پس برای یافتن نقطه تلاقی نمودار تابع $y_1=\sqrt{x+3}-1$ و $y_2=x$، داریم:

$$y_1=y_2 \Rightarrow \sqrt{x+3}-1=x \Rightarrow \sqrt{x+3}=x+1 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x+3=x^2+2x+1$$

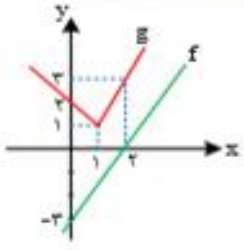
$$\Rightarrow x^2+x-2=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x=1 \checkmark \rightarrow y=1 \\ x=-2 \times \text{(در معادله صدق نمی‌کند)} \end{cases}$$

بنابراین نقطه $A(1,1)$، محل برخورد نمودار توابع y_1 و y_2 است و فاصله این نقطه از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA=\sqrt{x_A^2+y_A^2}=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$$

گروه آموزشی ماز

۱۰۶- با توجه به نمودارهای f و g در شکل زیر، حاصل $gof^{-1}(-2)\times gog(0)$ کدام است؟



۱) ۶
۲) ۴
۳) ۴-
۴) ۶-

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ فصل ۱)

پاسخ تشریحی:

ابتدا به سراغ $gof^{-1}(-2)$ می‌رویم، برای محاسبه این عامل، چون ۲- ابتدا وارد f^{-1} می‌شود، نیاز داریم که ضابطه تابع f و نیز f^{-1} را داشته باشیم، می‌دانیم که تابع خطی f از دو نقطه با مختصات $(2,0)$ و $(0,-3)$ عبور می‌کند، پس:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-3-0}{0-2}=\frac{3}{2}$$

$$y-y_1=m(x-x_1) \xrightarrow[m=\frac{3}{2}]{(2,0)\in f} y=\frac{3}{2}(x-2) \Rightarrow y=f(x)=\frac{3}{2}x-3$$

حال ضابطه تابع f^{-1} را نیز پیدا می‌کنیم:

$$y=\frac{3}{2}x-3 \xrightarrow{y\leftrightarrow x} x=\frac{3}{2}y-3 \Rightarrow \frac{3}{2}y=x+3 \Rightarrow y=f^{-1}(x)=\frac{2x+6}{3}$$

در نتیجه:

$$gof^{-1}(-2)=g(f^{-1}(-2))=g(\frac{2}{3})$$

برای محاسبه $g(\frac{2}{3})$ به سراغ شاخه‌ای از تابع g می‌رویم که $x=\frac{2}{3}$ در محدوده آن قرار دارد. مطابق شکل سوال، $x=\frac{2}{3}$ در محدوده شاخه نزولی تابع g قرار دارد و باید ضابطه این شاخه را به دست بیاوریم. می‌دانیم که این شاخه از دو نقطه با مختصات (۱،۱) و نیز (۰،۲) عبور می‌کند، بنابراین:

$$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2-1}{0-1}=-1$$

$$y-y_1=m(x-x_1)\xrightarrow[m=-1]{(0,2)\in g}y-2=-x\Rightarrow y=g(x)=-x+2\,;x\le 1$$

بنابراین $g(\frac{2}{3})$ برابر است با:

$$g(x)=-x+2\xrightarrow{x=\frac{2}{3}}g(\frac{2}{3})=-\frac{2}{3}+2=\frac{4}{3}$$

حال به سراغ عامل $gog(0)$ می‌رویم:

(از قسمت صعودی نمودار g، متوجه می‌شویم که $g(2)=3$)

$$gog(0)=g(g(0))=g(2)=3$$

در نتیجه حاصل عبارت خواسته شده برابر است با:

$$gof^{-1}(-2)\times gog(0)=(\frac{4}{3})\times(3)=4$$

گروه آموزشی ماز

۱۰۷- تابع f روی $\mathbb{R}$ اکیداً نزولی است. اگر $f(3)=0$ باشد، دامنه $g(x)=\sqrt{x^2f(x)}$ شامل چند عدد صحیح نامنفی است؟

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ فصل ۱)

پاسخ تشریحی:

برای پیدا کردن دامنه تابع g، داریم:

$$x^2f(x)\ge 0\xrightarrow{x^2\ge 0}f(x)\ge 0$$

از طرفی می‌دانیم که $f(x)$ تابعی اکیداً نزولی بوده و $f(3)=0$ است، لذا جدول تعیین علامت تابع f به صورت زیر خواهد بود:

x		3	
f(x)	+	0	−

ما دنبال محدوده‌ای هستیم که در آن $f(x)\ge 0$ باشد، بنابراین طبق جدول تعیین علامت فوق، محدوده موردنظر به صورت $(-\infty,3]$ است.

اما خواسته سوال، فقط اعداد صحیح و نامنفی است که عضو دامنه تابع g هستند، پس:

$$D_g=(-\infty,3]\xrightarrow{x\in W}x\in\{0,1,2,3\}$$

در نتیجه دامنه تابع g، شامل ۴ عدد صحیح نامنفی است.

گروه آموزشی ماز

۱۰۸- فرض کنید $g(x)$ وارون تابع $f(x)=x+2\sqrt{x}$ باشد. حاصل $g(3)+g(15)$ کدام است؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ فصل ۳)

نکته:

اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد: $f(a)=b\Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

$g(x)$ وارون تابع $f(x)$ است. یعنی $g(x)=f^{-1}(x)$، بنابراین:

$$g(3)=f^{-1}(3)=a\Rightarrow f(a)=3$$

$$g(15)=f^{-1}(15)=b\Rightarrow f(b)=15$$

$$f(x)=x+2\sqrt{x}\Rightarrow\begin{cases}a+2\sqrt{a}=3\Rightarrow a=1\\ b+2\sqrt{b}=15\Rightarrow b=9\end{cases}$$

$$\Rightarrow g(3)+g(15)=1+9=10$$

۱۰۹ - تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{2^x-(\frac{1}{2})^x}{2}$ را در نظر بگیرید. $f^{-1}(2)$ کدام است؟

۱) $\log_2(-1+\sqrt{5})$ ۲) $\log_2(1+\sqrt{5})$ ۳) $\log_2(2+\sqrt{5})$ ۴) $\log_2(3+\sqrt{5})$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ فصل ۱)

نکته)

$$a^{f(x)}=b \xrightarrow[\text{می‌گیریم}]{\text{از طرفین رابطه، در مبنای a لگاریتم}} \log_a^{a^{f(x)}}=\log_a^b \Rightarrow f(x)=\log_a^b$$

می‌دانیم اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد، داریم: $f^{-1}(a)=b \Leftrightarrow f(b)=a$. پس در این سوال به جای محاسبه $f^{-1}(2)$، معادله $f(x)=2$ را حل می‌کنیم:

$$2=\frac{2^x-(\frac{1}{2})^x}{2} \xrightarrow{2^x=t} t-\frac{1}{t}=4 \xrightarrow{\times t} t^2-4t-1=0 \Rightarrow t=\frac{4\pm\sqrt{20}}{2}=2\pm\sqrt{5} \Rightarrow \begin{cases} 2^x=2+\sqrt{5} \checkmark \\ 2^x=2-\sqrt{5} \times \end{cases}$$

چون 2^x منفی نمی‌باشد، بنابراین فقط $2+\sqrt{5}$ قابل قبول است. پس:

$$2^x=2+\sqrt{5} \xrightarrow{\text{لگاریتم در مبنای ۲}} \log_2 2^x=\log_2(2+\sqrt{5}) \Rightarrow x\log_2^2=\log_2^{(2+\sqrt{5})} \Rightarrow x=\log_2^{(2+\sqrt{5})}$$

گروه آموزشی ماز

۱۱۰ - اگر $f(x)=[x]-x$ و $g(x)=\frac{1-2x}{x+1}$ باشند، برد تابع gof کدام است؟

۱) $[-1,1)$ ۲) $(-1,1]$ ۳) $[1,+\infty)$ ۴) $(-\infty,1]$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ فصل ۱)

می‌دانیم که برد تابع $y=x-[x]$ بازه $[0,1)$ است. پس برد تابع $f(x)=[x]-x$، بازه $(-1,0]$ است. از طرفی در تابع $g(f(x))$، برد تابع f همان دامنه تابع g است. بنابراین ورودی تابع g بازه $(-1,0]$ خواهد بود که برد تابع g به ازای این ورودی حاصل می‌شود. پس کافی است که برد تابع g را به ازای ورودی $(-1,0]$ به دست بیاوریم، یعنی:

$$g(x)=\frac{-2x+1}{x+1}=\frac{-2x-2+2+1}{x+1}=\frac{-2(x+1)+3}{x+1}=-2+\frac{3}{x+1}$$

$$-1<x\le 0 \Rightarrow 0<x+1\le 1 \Rightarrow \frac{1}{x+1}\ge 1 \Rightarrow \frac{3}{x+1}\ge 3 \Rightarrow -2+\frac{3}{x+1}\ge 1 \Rightarrow gof\ge 1$$

بنابراین برد تابع gof، بازه $[1,+\infty)$ می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۱۱۱ - اگر $f(x)=\frac{2}{5}x-4$ و $g(x)=x^3+x$ باشند، مقدار $(g^{-1}of^{-1})(8)$ کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ فصل ۱)

نکته)

اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد: $f(a)=b \Leftrightarrow f^{-1}(b)=a$

می‌دانیم که $(g^{-1}of^{-1})(x)=g^{-1}(f^{-1}(x))$ است، پس: $(g^{-1}of^{-1})(8)=g^{-1}(f^{-1}(8))$ (*)

از طرفی، اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد، داریم: $f^{-1}(b)=a \Leftrightarrow f(a)=b$. پس برای محاسبه $f^{-1}(8)$، مقدار $f(x)$ را برابر ۸ قرار می‌دهیم:

$$f(x)=8 \Rightarrow \frac{2}{5}x-4=8 \Rightarrow x=30 \Rightarrow f^{-1}(8)=30$$

حال با داشتن $f^{-1}(8)=30$ و رابطه (*)، باید $g^{-1}(30)$ را به دست بیاوریم و مطابق مطالب فوق، برای محاسبهٔ $g^{-1}(30)$ هم، مقدار $g(x)$ را برابر ۳۰ قرار می‌دهیم:

$$x^3+x=30 \xrightarrow{\text{طبق گزینه‌ها}} x=3$$

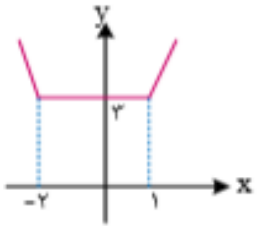
گروه آموزشی ماز

۱۱۲- تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+2|+|x-1|$، در کدام بازه، اکیداً نزولی است؟

۱) $(-\infty,-2)$ ۲) $(-\infty,1)$ ۳) $(-2,1)$ ۴) $(1,+\infty)$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ فصل ۱)

با تعیین تکلیف قدرمطلق‌ها و بازه‌بندی مناسب، ضابطه تابع f را به صورت زیر تشکیل داده و نمودار تابع را رسم می‌کنیم:



$$f(x)=|x+2|+|x-1|=\begin{cases}-(x+2)-(x-1)=-2x-1 & x<-2\\ (x+2)-(x-1)=3 & -2\le x\le 1\\ (x+2)+(x-1)=2x+1 & x>1\end{cases}$$

با توجه به نمودار تابع، مشخص است که این تابع در فاصله $(-\infty,-2)$ اکیداً نزولی است.

گروه آموزشی ماز

۱۱۳- اگر $f(x)=x^2-2x-3$; $x\ge 1$ باشد، نمودارهای دو تابع f^{-1} و $g(x)=\frac{x-9}{2}$ با کدام طول، متقاطع هستند؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ فصل ۱)

ابتدا ضابطه تابع f را به صورت زیر بازنویسی کرده و وارون آن را به دست می‌آوریم:

$$y=(x-1)^2-4\Rightarrow y+4=(x-1)^2\Rightarrow\sqrt{y+4}=|x-1|\xrightarrow{x\ge 1}\sqrt{y+4}=x-1\Rightarrow x=\sqrt{y+4}+1$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=\sqrt{x+4}+1$$

برای یافتن طول نقطه تلاقی، ضابطه f^{-1} و $g(x)$ را برابر قرار می‌دهیم:

$$f^{-1}(x)=g(x)\Rightarrow\sqrt{x+4}+1=\frac{x-9}{2}\Rightarrow\sqrt{x+4}=\frac{x-11}{2}\xrightarrow{\text{توان ۲ طرفین}}x+4=\frac{x^2-22x+121}{4}$$

$$\Rightarrow x^2-26x+105=0\Rightarrow(x-21)(x-5)=0\Rightarrow\begin{cases}x=21\\ x=5\end{cases}$$

روش دوم) طول نقطه تلاقی f و g^{-1} را محاسبه می‌کنیم:

$$g(x)=\frac{x-9}{2}\Rightarrow g^{-1}(x)=2x+9$$

$$g^{-1}(x)=f(x)\Rightarrow 2x+9=x^2-2x-3\Rightarrow x^2-4x-12=0\begin{cases}x=-2\times\\ x=6\checkmark\end{cases}\quad(x\ge 1)$$

حال طول نقطه تلاقی g و f^{-1} برابر $f(6)$ است، پس:

$$f(x)=x^2-2x-3\xrightarrow{x=6}f(6)=36-12-3=21$$

گروه آموزشی ماز

۱۱۴- نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{x}$ را در امتداد محور xها، ۱ واحد در جهت مثبت و سپس قرینه آن نسبت به محور xها را در امتداد محور yها، ۲ واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. فاصله نقطه‌های برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f، از مبدأ مختصات، کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ ۳) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ ۴) $\frac{\sqrt{10}}{2}$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ فصل ۱)

پاسخ تشریحی

ابتدا تغییرات گفته شده را به ترتیب بر روی تابع f اعمال می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{1}{x}\xrightarrow[x\to x-1]{\text{۱ واحد به سمت راست}}y_1=\frac{1}{x-1}\xrightarrow[y\to -y]{\text{قرینه نسبت به محور xها}}y_2=\frac{-1}{x-1}\xrightarrow[y-2]{\text{۲ واحد به سمت پایین}}y_3=\frac{-1}{x-1}-2$$

حال تابع حاصل را $g(x)$ می‌نامیم و داریم:

$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{x} \\ g(x)=\frac{-1}{x-1}-2 \end{cases}$$

می‌دانیم که برای به دست آوردن نقطه تلاقی توابع f و g، باید معادله $f(x)=g(x)$ را حل کنیم، پس:

$$f(x)=g(x)\Rightarrow\frac{1}{x}=\frac{-1}{x-1}-2\Rightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}=-2\Rightarrow\frac{x-1+x}{x(x-1)}=-2\Rightarrow\frac{2x-1}{x^2-x}=-2$$

$$\Rightarrow 2x-1=-2x^2+2x\Rightarrow 2x^2=1\Rightarrow x^2=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

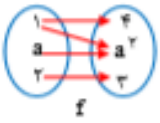
طول نقاط تلاقی نمودارهای f و g به صورت $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ به دست آمد. حال برای به دست آودن عرض نقاط تلاقی، $x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ را در یکی از توابع f یا g جایگذاری می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{1}{x}\xrightarrow{x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}}y=\pm\sqrt{2}$$

بنابراین مختصات نقاط تلاقی به صورت $A(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\sqrt{2})$ است که فاصله آن‌ها از مبدأ مختصات برابر است با:

$$OA=\sqrt{x_A^2+y_A^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+2}=\sqrt{\frac{5}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

۱۱۵- اگر روابط f و g تابع باشند، حاصل $a+b$ کدام است؟



$$g=\{(a,4),(2,b),(-2,b^2),(b,b)\}$$

۱) صفر ۲) ۲ ۳) -4 ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۱ ـ صفحات ۹۷ تا ۱۰۰ ـ متوسط)

تعریف تابع:
اگر یک رابطه به صورت مجموعه زوج‌های مرتب شده باشد، هنگامی این رابطه یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی در آن، مولفه اول برابر نداشته باشند.

پاسخ تشریحی:

در تابع f از عدد ۱ دو پیکان به ۴ و a^2 خارج شده است، بنابراین $a^2=4$ می‌باشد.

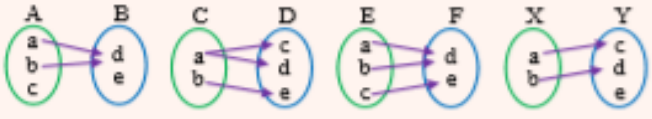
$a^2=4\rightarrow\begin{cases}a=2 \text{ غ ق ق}\\ a=-2 \checkmark\end{cases}$ (در این حالت از عدد ۲ دو پیکان به ۳ و ۴ خارج می‌شود)

$g=\{(-2,4),(2,b),(-2,b^2),(b,b)\}$

در تابع g دو زوج مرتب $(-2,4)$ و $(-2,b^2)$ وجود دارد. در نتیجه:

$b^2=4\rightarrow\begin{cases}b=2 \checkmark\\ b=-2 \text{ غ ق ق}\end{cases}$ (در این حالت دو زوج مرتب $(-2,-2)$ و $(-2,4)$ وجود خواهد داشت)

سوالات منتخب
چه تعداد از نمودارهای پیکانی زیر بیانگر یک تابع است؟



۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ✓ ۴) ۳

گروه آموزشی ماز

۱۱۶- تابع $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ فقط در بازهٔ $[2,+\infty)$ تعریف می‌شود. اگر $f(3)=1$ باشد، برد تابع $g(x)=\sqrt{bx^2+ax-2c}$ کدام است؟

۱) $[2,+\infty)$ ۲) $[0,+\infty)$ ۳) $[0,2]$ ۴) $[0,1]$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۱ ـ صفحات ۱۰۱ ـ متوسط)

دامنه و برد:
مجموعهٔ همه مؤلفه‌های اول زوج‌های مرتب تشکیل‌دهندهٔ هر تابع را «دامنه» و مجموعهٔ همهٔ مؤلفه‌های دوم را «برد» آن تابع می‌نامند.

پاسخ تشریحی:

در تابع $f(x)=\sqrt{ax^2+bx+c}$ باید $ax^2+bx+c\geq 0$ باشد. مجموعه جواب این نامعادله $[2,+\infty)$ است. مجموعه جواب نامعادلهٔ درجهٔ دوم هیچ‌گاه به صورت $[a,+\infty)$ نمی‌باشد. اگر عبارت زیر رادیکال دارای ۲ ریشهٔ ساده باشد یا بین دو ریشه جواب است و یا خارج دو ریشه و اگر دارای ریشهٔ مضاعف باشد مجموعه جواب یا $\mathbb{R}$ است و یا یک مجموعهٔ یک عضوی.
بنابراین این عبارت درجهٔ دوم تبوده و $a=0$ است. چون مجموعه جواب نامعادله $[2,+\infty)$ است، عدد ۲ ریشهٔ عبارت زیر رادیکال است.

$$\left.\begin{array}{l}f(x)=\sqrt{bx+c}\xrightarrow{x=2}2b+c=0\\ \text{از طرفی}\quad :f(3)=1\rightarrow 3b+c=1\end{array}\right\}\Rightarrow b=1\rightarrow c=-2$$

خواهیم داشت:

$$g(x)=\sqrt{x^2+4}:x^2\geq 0\rightarrow x^2+4\geq 4\rightarrow\sqrt{x^2+4}\geq 2\rightarrow g(x)\geq 2\rightarrow R_g=[2,+\infty)$$

سوالات منتخب

دامنهٔ تعریف $y=\frac{1}{\sqrt{ax^2+4x+a}}$ به صورت $\mathbb{R}-\{b\}$ است. $a+b$ کدام است؟

۱) ۱ ✓ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۳-

گروه آموزشی ماز

۱۱۷- f تابعی خطی با دامنهٔ $D=[2,5]$ و برد $R=[-3,3]$ است. اگر $f(3)>f(4)$ باشد، حاصل $f(2/5)$ چقدر است؟

۱) ۲ ۲) ۲- ۳) ۳ ۴) ۳-

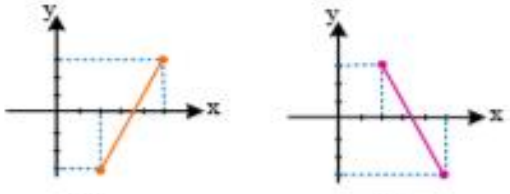
پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۱ ـ صفحات ۱۰۳ و ۱۰۸ ـ متوسط)

تابع خطی:

هر تابع که بتوان آن را به شکل $y=ax+b$ نمایش داد، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

پاسخ تشریحی:

دو تابع خطی با دامنهٔ $D=[2,5]$ و برد $[-3,3]$ وجود دارد:



(۱) (۲)

با توجه به اینکه $f(3)>f(4)$ است، نمودار شماره (۲) قابل قبول است. پس خواهیم داشت:

$$f(x)=ax+b \rightarrow \begin{cases} f(2)=3 \rightarrow 2a+b=3 \\ f(5)=-3 \rightarrow 5a+b=-3 \end{cases} \Rightarrow 3a=-6 \rightarrow a=-2 \rightarrow b=7$$

$$\Rightarrow f(x)=-2x+7 \rightarrow f(2/5)=-5+7=2$$

سوالات منتخب

چند تابع خطی می‌توان نوشت که دامنهٔ آن $[2,3)$ و برد آن $(1,2]$ باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ✓ ۳) ۲ ۴) ۳

گروه آموزشی ماز

۱۱۸- اگر f تابعی ثابت و $g(x)=\frac{3x}{f(x)}$ همانی باشد، حاصل $g(2)-f(2)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۱-

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۱ ـ صفحه ۱۱۰ ـ ساده)

تابع همانی:

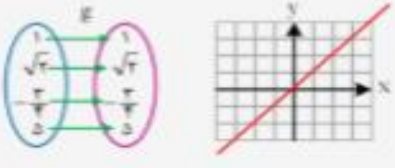
۱) تابعی مانند f را که برد آن تنها شامل یک عضو است، تابع ثابت می‌نامیم. اگر این عضو را k بنامیم، تابع ثابت را معمولاً با معادلهٔ $f(x)=k$ نمایش می‌دهیم.

۲) اگر دامنه و برد یک تابع برابر باشند و هر عضو از دامنهٔ تابع دقیقاً به همان عضو در برد نظیر شود، تابع را همانی می‌نامند.

اگر دامنهٔ تابع همانی را $\mathbb{R}$ در نظر بگیریم، نمودار آن همان خط $y=x$ خواهد شد که با معادلهٔ $f(x)=x$ هم نمایش داده می‌شود. (نیمساز ناحیه اول و سوم است.)

مثال)

$$f=\{(a,a),(b,b),(c,c)\}$$



پاسخ تشریحی:

f تابعی ثابت است و به صورت $f(x)=k$ می‌باشد.
g تابعی همانی است و به صورت $g(x)=x$ می‌باشد.

پس داریم:

$$g(x)=\frac{3x}{f(x)}\rightarrow x=\frac{3x}{k}\rightarrow k=3$$

بنابراین:

$$g(2)-f(2)=2-3=-1$$

سوالات منتخب

اگر f تابعی ثابت و g تابعی همانی بوده و $g^2(2)-f^2(2)=3f(3)$ باشد، حاصل $(3f(-)+3)^2$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۹ ۳) ۱۶ ۴) ۲۵ ✓

گروه آموزشی ماز

۱۱۹- تابع $f(x)=|x+a|+b$ از مبدأ مختصات گذشته و به جزء ناحیهٔ سوم از بقیهٔ نواحی مختصات عبور می‌کند. اگر $f(b)=3$ باشد، $f(2)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۱- ۴) ۲-

پاسخ: گزینه ٤ (ریاضی ۱ ـ صفحات ۱۱۱ تا ۱۱۵ ـ دشوار)

نکات طلایی:

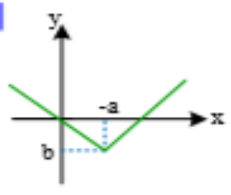
۱) تابعی که هر مقدار در دامنه را به قدرمطلق آن در برد نظیر می‌کند، تابع قدرمطلق نامیده می‌شود. تابع قدرمطلق را با $f(x)=|x|$ یا $y=|x|$ نمایش می‌دهند.
۲) با داشتن نمودار تابعی مانند $f(x)$، می‌توان نمودار تابع $f(x)+k$ را با انتقال نمودار $f(x)$ به اندازهٔ k واحد در امتداد محور yها به دست آورد. اگر $k>-$ باشد، انتقال در جهت مثبت و اگر $k<0$ باشد، انتقال در جهت منفی خواهد بود.
برای رسم نمودار تابع $f(x+k)$ کافی است نمودار تابع $f(x)$ را k واحد در امتداد محور xها انتقال دهیم، اگر $k>-$ باشد، انتقال در جهت منفی و اگر $k<-$ باشد، انتقال در جهت مثبت خواهد بود.

پاسخ تشریحی:

تابع $f(x)=|x+a|+b$ از مبدأ مختصات عبور می‌کند، پس:

$$f(-)=|a|+b=-\rightarrow b=-|a|$$

این تابع فقط از ناحیهٔ سوم مختصات عبور نمی‌کند. بنابراین نمودار آن به صورت زیر است:



در نتیجه a عددی منفی بوده و $b=a$ می‌باشد: $f(x)=|x+a|+a$
خواهیم داشت:

$$f(b)=3\rightarrow f(a)=3\rightarrow |2a|+a=3\rightarrow -2a+a=3\rightarrow a=-3$$
$$\rightarrow f(x)=|x-3|-3\rightarrow f(2)=1-3=-2$$

سوالات منتخب

تابع $y=f(x)$ را ۲ واحد به سمت پایین و ۳ واحد به سمت راست منتقل می‌کنیم تا تابع $g(x)=x^2-8x+15$ حاصل شود. اگر $f(a)=2$ باشد، مجموع مقادیر a کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲ ✓ ۳) ۲- ۴) ۷

گروه آموزشی ماز

۱۲۰- تابع $f(x)=(4-k^2)x^3+k$ اکیداً صعودی است. $[k]$ چند عدد صحیح را شامل می‌شود؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ و ۳ ـ صفحات ۵۴ و ۵۵ ، ۴ و ۱۰ ـ ساده)

هر آنچه باید در مورد توابع صعودی و نزولی بدانید:

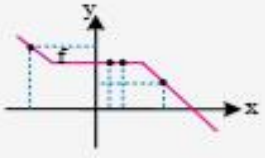
تابع جزء صحیح به هر عدد صحیح، خود همان عدد صحیح را نسبت می‌دهد و به هر عدد غیرصحیح، بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از آن را نسبت می‌دهد. ضابطهٔ این تابع به صورت $f(x)=[x]$ نشان داده می‌شود.

برای مثال داریم:

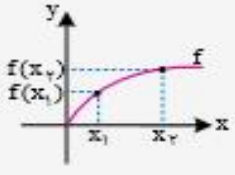
$$[-3]=-3 \qquad [-4/3]=-5 \qquad [6/1]=6 \qquad [4]=4$$

تابع صعودی: اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ که $x_1<x_2$، داشته باشیم $f(x_1)\le f(x_2)$، آن‌گاه f را تابعی صعودی می‌نامیم.

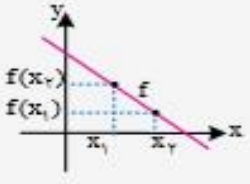
تابع نزولی: اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ که $x_1<x_2$، داشته باشیم $f(x_1)\ge f(x_2)$، آن‌گاه f را تابعی نزولی می‌نامیم.



تابع اکیداً صعودی: اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ که $x_1<x_2$ داشته باشیم $f(x_1)<f(x_2)$ آن‌گاه f را تابعی اکیداً صعودی می‌نامیم.



تابع اکیداً نزولی: اگر برای هر دو نقطهٔ x_1 و x_2 از مجموعهٔ A $(A\subseteq D_f)$ که $x_1<x_2$ داشته باشیم $f(x_1)>f(x_2)$ آن‌گاه f را تابعی اکیداً نزولی می‌نامیم.



تابع f را در یک بازه ثابت می‌گوییم، اگر برای تمام مقادیر x در این بازه مقدار f ثابت باشد. با توجه به تعاریف بالا، تابع ثابت در یک بازه، هم صعودی و هم نزولی محسوب می‌شود.

نکته:

به تابعی که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، تابع اکیداً یکنوا گوییم. همچنین به تابعی که صعودی یا نزولی باشد، تابع یکنوا گوییم.

پاسخ تشریحی:

تابع $y=ax^3+b$ با شرط $a>0$ اکیداً صعودی است. بنابراین تابع $f(x)=(4-k^2)x^3+k$ اکیداً صعودی است به شرطی که:

$$4-k^2>0 \rightarrow k^2<4 \rightarrow -2<k<2$$

در نتیجه:

$$[k]\in\{-2,-1,0,1\}$$

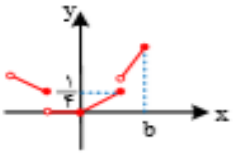
سوالات منتخب

تابع $y=(a-x)^3+b$ اکیداً نزولی است. تمام محدودهٔ قابل قبول برای a و b کدام است؟

۱) $b>0\ ,\ a<0$ ۲) $b<0\ ,\ a<0$ ۳) $b<0\ ,\ a>0$ ۴) $a,b\in\mathbb{R}$ ✓

گروه آموزشی ماز

۱۲۱- نمودار تابع $y=\frac{x}{a}[ax]$ به صورت مقابل است. $b-a$ کدام است؟



۱) ۱
۲) ۱-
۳) ۲
۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۵۴ تا ۵۶ ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

در نمودار داده شده نقاط توپر در سمت راست و نقاط توخالی در سمت چپ پاره‌خط‌ها قرار دارند. بنابراین ضریب x داخل براکت یعنی a منفی است. می‌دانیم طول بازه‌هایی که نمودار $[ax]$ بازه‌بندی می‌شود $\frac{1}{|a|}$ است. بنابراین طول تقطه‌ای که عرض آن $\frac{1}{4}$ است برابر $\frac{1}{|a|}$ یا همان $-\frac{1}{a}$ است.

$$f(x)=\frac{x}{a}[ax]\xrightarrow{f(-\frac{1}{a})=\frac{1}{4}}-\frac{1}{a^2}[-1]=\frac{1}{4}\to\frac{1}{a^2}=\frac{1}{4}\to a^2=4\xrightarrow{a<0}a=-2$$

بنابراین این نقطه برابر $\frac{1}{2}$ و طول نقطهٔ بعدی یعنی b برابر ۱ است.

$$\Rightarrow b-a=1-(-2)=3$$

گروه آموزشی ماز

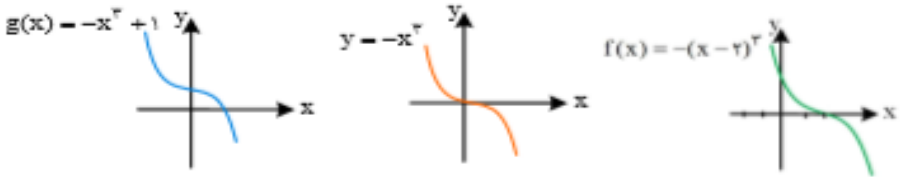
۱۲۲- تابع $y=f(x)$ را ۲ واحد در جهت xهای منفی و ۱ واحد در جهت yهای مثبت منتقل می‌کنیم تا تابع $g(x)=-x^3+1$ حاصل شود. تابع f از کدام ناحیه عبور نمی‌کند؟

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱ و ۳ ـ صفحات ۱۱۱ و ۱۱۵ ، ۴ و ۵ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

برای رسم تابع $y=f(x)$ کافیست تابع g را ۱ واحد در جهت yهای منفی و ۲ واحد در جهت xهای مثبت انتقال دهیم:



بدیهی است تابع f از ناحیهٔ سوم عبور نمی‌کند.

سوالات منتخب

تابع $y=(x-1)^3+2$ از کدام ناحیهٔ مختصات عبور نمی‌کند؟ (کتاب درسی)

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم ✓

گروه آموزشی ماز

۱۲۳- طول بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $f(x)=\begin{cases}-x^2-2x & x\le 0\\ -1 & 0<x\le 2\\ 2x-5 & x>2\end{cases}$ در آن نزولی است، کدام است؟

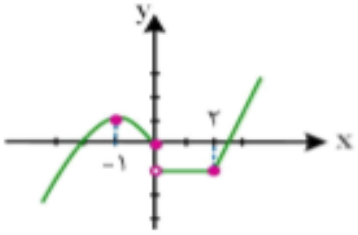
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

www.mapedu.ir

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱ و ۳ ـ صفحات ۱۱۲ و ۱۳۳، ۵ و ۱۰ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

تابع f را رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودار مشخص می‌شود تابع f در بازهٔ $[-1,2]$ نزولی بوده و طول این بازه برابر ۳ است.

سوالات منتخب:

برد تابع $f(x)=\begin{cases}-|x-2| & x>0\\ 1 & x=0\\ x^2+2x+2 & x<0\end{cases}$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}$ ۲) $\mathbb{R}-(0,1)$ ۳) $\mathbb{R}-[0,1)$ ✓ ۴) $\mathbb{R}-\{0\}$

گروه آموزشی ماز

۱۲۴- در کدام گزینه توابع f و g برابرند؟

۱) $\begin{cases}f(x)=[x-[x]]\\ g(x)=0\end{cases}$

۲) $\begin{cases}f(x)=[2x]\\ g(x)=2[x]\end{cases}$

۳) $\begin{cases}f(x)=\sqrt{x^2-1}\\ g(x)=\sqrt{x-1}\times\sqrt{x+1}\end{cases}$

۴) $\begin{cases}f(x)=\sqrt{x^2(x-1)}\\ g(x)=|x|\sqrt{x-1}\end{cases}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۵۰ و ۵۵ ـ متوسط)

دو تابع برابر:

۱) دو تابع f و g را برابر می‌نامیم هرگاه:

الف) دامنه f و دامنه g با هم برابر باشند.

ب) برای هر x از این دامنه یکسان داشته باشیم: $f(x)=g(x)$

۲) $0\le x-[x]<1$

پاسخ تشریحی:

در گزینهٔ ۱ دامنهٔ دو تابع برابر $\mathbb{R}$ و ضابطه‌ها برابرند.

$$f(x)=[x-[x]]=[x]-[x]=0$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) در گزینهٔ ۲ ضابطهٔ دو تابع برابر نمی‌باشد:

$$[2x]\neq 2[x]$$

۳) در گزینهٔ ۳ دامنهٔ دو تابع برابر نیست:

$$f: x^2-1\ge 0\rightarrow\begin{cases}x\ge 1\\ x\le -1\end{cases}\rightarrow D_f=(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$$

$$g: x-1\ge 0,\ x+1\ge 0\rightarrow x\ge 1\rightarrow D_g=[1,+\infty)$$

۴) در گزینهٔ ۴ دامنهٔ دو تابع برابر نیست:

$$D_f=[1,+\infty)\cup\{0\}$$

$$D_g=[1,+\infty)$$

۱۲۵- دامنه تابع $f(x)=\sqrt{2\log_{(0/5)}^{x}-\log_{(0/5)}^{(x+6)}}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۳ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۵۲ و ۵۳ / ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۰ ـ متوسط)

نکته:

تابع $y=\log_a^x$ در حالت $a>1$، اکیداً صعودی و در حالت $0<a<1$ اکیداً نزولی است.

پاسخ تشریحی:

برای پیدا کردن دامنه تابع، عبارت زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار می‌دهیم:

$$2\log_{0/5}^{x}-\log_{0/5}^{x+6}\geq 0\rightarrow \log_{0/5}^{x^2}-\log_{0/5}^{x+6}\geq 0\rightarrow \log_{0/5}^{x^2}\geq \log_{0/5}^{x+6}$$

چون $\log_{0/5}^{x}$ تابعی اکیداً نزولی است، هر چه ورودی بزرگ‌تر باشد، خروجی کوچک‌تر است. پس جهت تامساوی بین آرگومان‌ها عوض می‌شود.

$$x^2\leq x+6\rightarrow x^2-x-6\leq 0\rightarrow (x-3)(x+2)\leq 0\rightarrow -2\leq x\leq 3$$

همچنین با توجه به اینکه آرگومان لگاریتم‌ها باید مثبت باشند، داریم:

$$\left.\begin{array}{l} x>0 \\ x+6>0\rightarrow x>-6 \end{array}\right\}\xrightarrow{\cap} x>0$$

با اشتراک موارد بالا به بازه $0<x\leq 3$ می‌رسیم که شامل اعداد صحیح $1,2,3$ است.

سوالات منتخب

اگر $\log(x+1)\leq \log(2x-3)$، حدود x کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $[4,+\infty)$ ✓ ۲) $(\frac{3}{2},4]$ ۳) $(-1,4]$ ۴) $(-\infty,4]$

گروه آموزشی ماز

۱۲۶- اگر تابع $f(x)=(k^2+2k)x^3+5$ اکیداً نزولی باشد، تابع $g(x)=(x+k)^3+4k$ از کدام ناحیه مختصات عبور نمی‌کند؟ $(k\in\mathbb{Z})$

۱) اول ۲) دوم ۳) سوم ۴) چهارم

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۲ تا ۱۰ ـ ساده)

نکته:

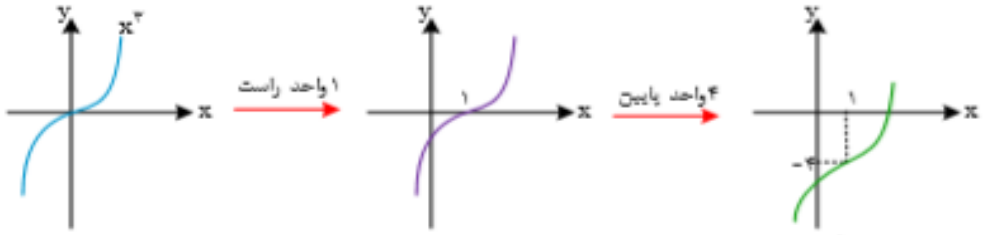
اگر تابع $f(x)$ اکیداً صعودی باشد، تابع $-f(x)$ اکیداً نزولی است.

پاسخ تشریحی:

چون تابع $y=x^3$ اکیداً صعودی، تابع ax^3، $a>0$ نیز اکیداً صعودی و ax^3، $a<0$ اکیداً نزولی است.

$$k^2+2k<0\rightarrow k(k+2)<0\xrightarrow{\text{بین دو ریشه}}-2<k<0\xrightarrow{k\in\mathbb{Z}}k=-1$$

بنابراین تابع $g(x)$ به شکل $g(x)=(x-1)^3-4$ در می‌آید.



همان‌طور که معلوم است تابع $g(x)$ از ناحیه دوم عبور نمی‌کند.

سوالات منتخب

تابع $f(x)=(-9+k^2)x^3+5$ اکیداً نزولی است. مجموع مقادیر صحیح k چقدر است؟ (تجربی داخل ۱۴۰۱)

۱) صفر ✓ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۶

گروه آموزشی ماز

۱۲۷- نقطه $A(3,4)$ روی تابع $y=f(x)$ قرار دارد. با رسم تابع $y=\frac{-f(-2x+1)-2}{3}$ نقطه A به نقطه B منتقل می‌شود. فاصله نقاط A و B از هم چقدر است؟

۱) $2\sqrt{11}$ ۲) $2\sqrt{13}$ ۳) $2\sqrt{5}$ ۴) $2\sqrt{19}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۵ تا ۲۳ ـ متوسط)

نکته:

خلاصه تغییرات نقاط روی نمودار:

طول نقاط با a جمع می‌شود: $f(x)\to f(x-a)$

عرض نقاط با b جمع می‌شود: $f(x)\to f(x)+b$

طول نقاط بر a تقسیم می‌شود: $f(x)\to f(ax)$

عرض نقاط در b ضرب می‌شود: $f(x)\to bf(x)$

پاسخ تشریحی:

حال تغییرات را متوالیاً بررسی می‌کنیم:

$$f(x)\to f(x+1)\to f(-2x+1)\to -\frac{1}{3}f(-2x+1)\to -\frac{1}{3}f(-2x+1)-\frac{2}{3}$$

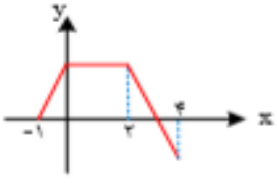
$$A(3,4)\xrightarrow{\text{۱ واحد چپ}}(2,4)\xrightarrow{\text{طول تقسیم بر } -2}(-1,4)\xrightarrow{\text{عرض ضرب در } -\frac{1}{3}}(-1,-\frac{4}{3})\xrightarrow{\text{جمع عرض با } -\frac{2}{3}}B(-1,-2)$$

فاصله نقاط A و B از هم:

$$AB=\sqrt{(3+1)^2+(4+2)^2}=\sqrt{16+36}=\sqrt{52}=2\sqrt{13}$$

گروه آموزشی ماز

۱۲۸- اگر تابع $y=f(x)$ مطابق شکل روبه‌رو باشد، تابع $g(x)=3f(\frac{4-x}{2})+1$ در کدام بازه اکیداً نزولی است؟



۱) $[-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}]$

۲) $[2,6]$

۳) $[4,6]$

۴) $[\frac{1}{2},\frac{3}{2}]$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۵ تا ۲۳ ـ متوسط)

نکته:

انتقال‌های طولی و عرضی وضعیت یکنوایی تابع را عوض نمی‌کنند. در انبساط و انقباض عرضی و طولی اگر a یا k مثبت باشند، وضعیت یکنوایی عوض نمی‌شود، در صورتی که a یا k منفی باشند، وضعیت یکنوایی تابع عوض می‌شود.

$f(x)\to f(ax)$

$f(x)\to kf(x)$

پاسخ تشریحی:

با توجه به ضابطه تابع $g(x)=3f(-\frac{x}{2}+2)+1$ که در آن $a<0$ و $k>0$ است، وضعیت یکنوایی تابع در هر بازه عوض خواهد شد، بنابراین بخشی که در $f(x)$ اکیداً صعودی است، در $g(x)$ اکیداً نزولی خواهد شد. تابع $f(x)$ در بازه $[-1,0]$ از دامنه اکیداً صعودی است:

$$f(x)\xrightarrow{\text{۲ واحد چپ}}f(x+2)\xrightarrow{\text{طول نقاط ضرب در } -2}f(-\frac{x}{2}+2)\xrightarrow{\text{عرض نقاط ضرب در } 3}3f(-\frac{x}{2}+2)\xrightarrow{\text{۱ واحد بالا}}3f(-\frac{x}{2}+2)+1$$

$$[-1,0]\longrightarrow[-3,-2]\longrightarrow[4,6]$$

گروه آموزشی ماز

۱۲۹- اگر تابع $f(x)=\begin{cases}-3x & x\geq 1\\ \frac{1}{\log_a^{x+7}} & -7<x<1\end{cases}$ اکیداً نزولی باشد، حدود a کدام است؟

۱) $[2,+\infty)$ ۲) $(0,2]$ ۳) $(1,2]$ ۴) $(1,2)$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۶ تا ۱۰ ـ دشوار)

نکته:
توابع دو یا چند ضابطه‌ای اکیداً یکنوا هستند، اگر تک تک ضابطه‌ها اکیداً یکنوا باشند و برد آن‌ها اشتراکی نداشته باشد.

پاسخ تشریحی:

در اینجا ضابطهٔ $-3x$ اکیداً نزولی است و ضابطه $-\log_a^{x+7}$ نیز اکیداً نزولی است، اگر $a>1$ باشد. حال برد تک‌تک ضابطه‌ها را می‌یابیم:

$x\geq 1 \rightarrow -3x\leq -3 \rightarrow R=(-\infty,-3]$

$-7<x<1 \rightarrow 0<x+7<8 \xrightarrow{a>1} \log_a^{x+7}<\log_a^8 \rightarrow -\log_a^{x+7}>-\log_a^8$

برای اینکه دو برد اشتراک نداشته باشند، باید:

$-\log_a^8\geq -3 \rightarrow \log_a^8\leq 3 \rightarrow a^3\geq 8 \rightarrow a\geq 2$

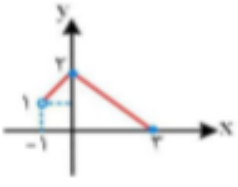
سوالات منتخب

تابع $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\geq -1\\ 2 & x<-1\end{cases}$ را در نظر بگیرید. بزرگ‌ترین بازه‌ای که f در آن نزولی است، کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) ۲) $(-\infty,-1]$ ۳) $[-1,0]$ ۴) $(-\infty,0]$ ✓

گروه آموزشی ماز

۱۳۰- اگر نمودار تابع f به شکل مقابل باشد، اشتراک دامنه و برد تابع $g(x)=3f(-x+2)-1$ شامل چند عدد صحیح است؟



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۳
۴) ۶

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۵ تا ۲۳ ـ متوسط)

نکته ۱:
تغییرات طولی، دامنه و تغییرات عرضی، برد را عوض می‌کنند.

نکته ۲:
برای به دست آوردن دامنه و برد تابع از روی نمودار آن، به ترتیب تصویر نمودار را روی محور xها و yها بدست می‌آوریم.

پاسخ تشریحی:

$f(x)\xrightarrow{\text{۲ واحد چپ}}f(x+2)\xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محور yها}}f(-x+2)\xrightarrow{\text{عرض نقاط ۳ برابر}}3f(-x+2)\xrightarrow{\text{۱ واحد پایین}}3f(-x+2)-1$

$D_f:(-1,3]\longrightarrow(-3,1]\longrightarrow[-1,3)\xrightarrow{\text{بدون تغییر}}[-1,3)\xrightarrow{\text{بدون تغییر}}[-1,3)$

$R_f:[0,2]\xrightarrow{\text{بدون تغییر}}[0,2]\xrightarrow{\text{بدون تغییر}}[0,2]\xrightarrow{\text{عرض نقاط ۳ برابر}}[0,6]\xrightarrow{\text{۱ واحد پایین}}[-1,5]$

اشتراک دامنه و برد تابع g بازه $[-1,3)$ است که شامل اعداد صحیح $-1,0,1,2$ است.

سوالات منتخب

تابع $f(x)=\sqrt{x}$ با دامنه $[0,4]$ را در نظر بگیرید، اگر $g(x)=f(x-2)$, $h(x)=f(x)+5$ باشند، $D_g\cap R_h$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) $[5,7]$ ۲) $[5,6]$ ✓ ۳) $[3,5]$ ۴) $[6,7]$

گروه آموزشی ماز

۱۳۱- اگر $f(x)$ تابع چندجمله‌ای درجه دوم باشد، درجه کدام تابع بزرگ‌تر است؟

۱) $f^{۲}(x)+f(x)$ ۲) $fof^{۲}(x)$ ۳) $x^{۳}-f(x)$ ۴) $(f(x)-۱)^{۳}$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۲ ـ متوسط)

نکته:

اگر $f(x)$ چندجمله‌ای درجه n باشد و $g(x)$ چندجمله‌ای درجه m باشد:

$f^{k}(x) \rightarrow kn$ چندجمله‌ای درجه

$f(x).g(x) \rightarrow m+n$ چندجمله‌ای درجه

$fog(x) \rightarrow mn$ چندجمله‌ای درجه

$f(x) \pm g(x) \xrightarrow{m \neq n} \max(m,n)$ چندجمله‌ای درجه

پاسخ تشریحی:

بنابراین در اینجا داریم:

بررسی موارد:

۱) $f^{۲}(x)+f(x) \rightarrow$ درجه ۴

$f^{۲}(x) \rightarrow$ درجه ۴ ، $f(x) \rightarrow$ درجه ۲

۲) $f(f^{۲}(x)) \rightarrow$ درجه ۸

$f \rightarrow$ درجه ۲ ، $f^{۲}(x) \rightarrow$ درجه ۴

۳) $x^{۳}-f(x) \rightarrow$ درجه ۳

$x^{۳} \rightarrow$ درجه ۳ ، $f(x) \rightarrow$ درجه ۲

۴) $(f(x)-۱)^{۳} \rightarrow$ درجه ۶

$(f(x)-۱) \rightarrow$ درجه ۲

گروه آموزشی ماز

۱۳۲- نمودار توابع $y=\cos x$ و $y=\cos(۴x+\pi)$ در بازه $(۰,\pi)$ در چند نقطه متقاطع‌اند؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۴

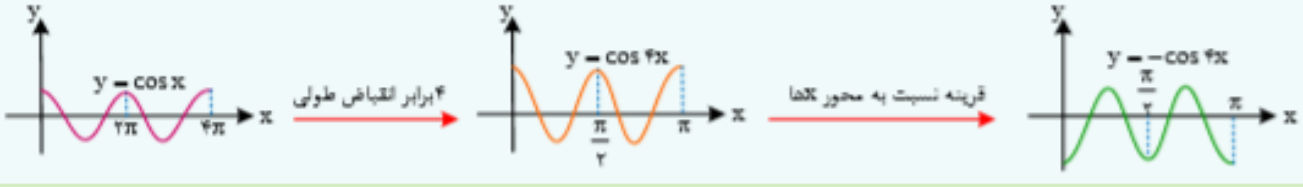
پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۵ تا ۲۳ ـ متوسط)

نکته ۱:

در رسم تابع $f(ax)$ از روی $f(x)$ با فرض $a>۱$ تابع در راستای محور طول‌ها a برابر فشرده (منقبض) می‌شود یا طول نقاط تقسیم بر a می‌شوند.

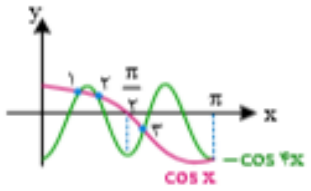
نکته ۲:

می‌دانیم $\cos(۴x+\pi)=-\cos ۴x$ و برای رسم تابع $-f(x)$ از روی $f(x)$ ، کافیست نمودار آن را نسبت به محور xها قرینه کنیم.



پاسخ تشریحی:

دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



معلوم است که دو تابع در $(۰,\pi)$، ۳ نقطه تقاطع دارند.

سوالات منتخب

معادله $\cos x = \cos ۲x$ در بازه $[۰,۴\pi]$ چند جواب دارد؟ (کتاب درسی)

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷ ✓

گروه آموزشی ماز

۱۳۳- اگر برای توابع $f(x)=\sqrt{x-a}$ و $g(x)=\sqrt{b-x}$، دامنه تابع $gof(x)$ به شکل $[۴,۲۹]$ باشد، دامنه تابع $y=\frac{f}{g}(x)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۶۵ تا ۷۰ / ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۱ تا ۱۴ ـ متوسط)

نکته:

می‌دانیم $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$

پاسخ تشریحی:

$D_f: x-a\ge ۰ \to x\ge a$

$D_g: b-x\ge ۰ \to x\le b$

$f(x)\in D_g: \sqrt{x-a}\le b \to x-a\le b^۲ \ (*) \to x\le b^۲+a$

اشتراک شرایط بالا به شکل $[a,b^۲+a]$ است. با مقایسه این بازه با $[۴,۲۹]$ داریم:

$a=۴$

$b^۲+a=۲۹ \xrightarrow{a=۴} b^۲=۲۵ \to b=\pm ۵ \to$ $b=-۵$ با مقدار (*) تناسوی $\to b=۵$ جواب ندارد.

دامنه تابع $y=\frac{f}{g}(x)$ برابر است با: $D_f\cap D_g-\{x \mid g(x)=۰\}$، پس:

$D_f: x\ge ۴$

$D_g: x\le ۵$

$g(x)=۰ \to \sqrt{۵-x}=۰ \to x=۵$

پس دامنه تابع $\frac{f}{g}$ به شکل $[۴,۵)$ است که شامل یک عدد صحیح است.

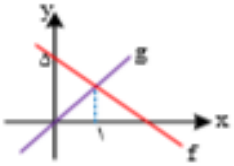
سوالات منتخب:

اگر $f(x)=\frac{۲}{x-۱}$ و $D_{fof}=\mathbb{R}-\{a,b\}$ باشد، $a^۳+b^۳$ کدام است؟ (کتاب درسی)

۱) ۲۸ ✓ ۲) ۲۹ ۳) ۳۵ ۴) ۳۶

گروه آموزشی ماز

۱۳۴- توابع خطی f و g در یک دستگاه رسم شده‌اند. اگر تابع $f+g$ تابعی ثابت باشد، $gof(۲)$ کدام است؟



۱) -۵
۲) ۵
۳) صفر
۴) ۱۰

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱ ـ صفحه ۱۱۰ / ریاضی ۲ ـ صفحه ۶۵ تا ۷۰ / ریاضی ۳ ـ صفحه ۲۲ ـ ساده)

نکته:
مجموع دو تابع خطی، تابعی خطی یا ثابت است. این تابع ثابت خواهد شد اگر دو تابع خطی دارای ضرایب x (شیب‌های) قرینه باشند.

پاسخ تشریحی:

اگر طول از مبدأ تابع f را a در نظر بگیریم، ضابطه آن به شکل $f(x)=-\frac{۵}{a}x+۵$ خواهد بود. بنابراین تابع g نیز به شکل $g(x)=\frac{۵}{a}x$ است. دو تابع در نقطه $x=۱$ متقاطع‌اند، پس:

$$f(۱)=g(۱)\rightarrow \frac{۵}{a}=-\frac{۵}{a}+۵\rightarrow \frac{۱۰}{a}=۵\rightarrow a=۲$$

پس: $f(x)=-\frac{۵}{۲}x+۵$ و $g(x)=\frac{۵}{۲}x$

$$gof(۲)=g(f(۲))=g(-)=-$$

سوالات منتخب
دو تابع $f(x)=b-۳ax$ و $g(x)=c-(۳b-۳)x$ ثابت هستند. اگر $f+g=۵$ باشد، حاصل bc چقدر است؟ (تجربی داخل ۱۴۰۱)

۱) -۶ ۲) -۴ ۳) ۴ ✓ ۴) ۶

گروه آموزشی ماز

۱۳۵- اگر f تابعی وارون‌پذیر، $f^{-1}(2x+1)=2x+2$ و $g(x)=\begin{cases}\sqrt{x}-4 & x\geq 1\\ g(1-x) & x<1\end{cases}$ باشند. $f(g(-3))$ کدام است؟

۱) -2 ۲) -3 ۳) -4 ۴) -5

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۲۴ تا ۲۹ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی

ابتدا باید $g(-3)$ را به دست آوریم. برای این کار کافی است در ضابطه پایین $g(x)=\begin{cases}\sqrt{x}-4 & x\geq 1\\ g(1-x) & x<1\end{cases}$، به جای x، $x=-3$ قرار دهیم. پس داریم:

$$x=-3: g(-3)=g(1-(-3))=g(1+3)=g(4)$$

حالا برای به دست آوردن $g(4)$ با استفاده از ضابطه بالایی می‌توان نوشت:

$$x=4: g(4)=\sqrt{4}-4=2-4=-2$$

پس خواسته مسئله به دست آوردن مقدار $f(-2)$ است. از طرفی می‌دانیم که ترکیب هر تابع با وارون خود، تابع همانی است پس از طرفین تساوی $f^{-1}(2x+1)=2x+2$، f می‌گیریم:

$$f^{-1}(2x+1)=2x+2 \Rightarrow f(f^{-1}(2x+1))=f(2x+2) \Rightarrow f(2x+2)=2x+1$$

حال برای پیدا کردن $f(-2)$، داریم:

$$2x+2=-2 \Rightarrow x=-2$$

$$f(2x+2)=2x+1 \xrightarrow{x=-2} f(-2)=2(-2)+1=-5$$

گروه آموزشی ماز

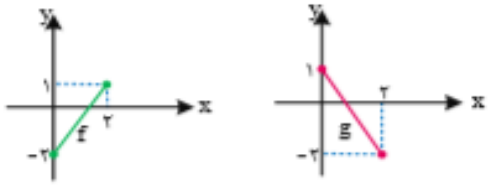
۱۳۶- توابع خطی با دامنه $[0,2]$ و برد $[-2,1]$ با کدام عرض متقاطع‌اند؟

۱) ۱ ۲) -1 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $-\frac{1}{2}$

پاسخ گزینه ۴ (ریاضی ۱ ـ صفحه ۱۰۳ و ۱۰۴ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی

دو تابع خطی مطابق با شکل مقابل داریم که دامنه آن‌ها $[0,2]$ و برد آن‌ها $[-2,1]$ است. ببینید:



حالا ضابطه هر یک از دو تابع را می‌نویسیم، پس داریم:

$$f:\begin{matrix}A(0,-2)\\B(2,1)\end{matrix} \Rightarrow \text{شیب}=\frac{1-(-2)}{2-0}=\frac{3}{2} \Rightarrow f(x)=\frac{3}{2}x-2$$

$$g:\begin{matrix}A(0,1)\\B(2,-2)\end{matrix} \Rightarrow \text{شیب}=\frac{1-(-2)}{0-2}=-\frac{3}{2} \Rightarrow g(x)=-\frac{3}{2}x+1$$

برای به دست آوردن نقطه برخورد این دو خط باید معادله $f(x)=g(x)$ را حل کنیم پس می‌توان نوشت:

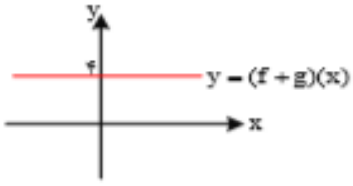
$$f(x)=g(x) \Rightarrow \frac{3}{2}x-2=-\frac{3}{2}x+1 \Rightarrow 3x=3 \Rightarrow x=1$$

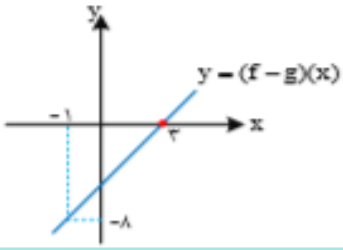
با جای‌گذاری $x=1$ در ضابطه هر یک از خط‌ها عرض نقطه برخورد $y=-\frac{1}{2}$ به دست می‌آید.

گروه آموزشی ماز

۱۳۷- اگر نمودار توابع $f+g$ و $f-g$ به صورت مقابل باشند، نمودار تابع $y=(f.g)(x)$ از کدام ناحیه محورهای مختصات نمی‌گذرد؟

۱) اول
۲) دوم
۳) سوم
۴) چهارم





پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۶۵ و ۶۹ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

طبق فرض مسئله $y=(f+g)(x)=4$ است. ضابطه تابع $y=(f-g)(x)$ را با توجه به معلوم بودن دو نقطه از آن می‌نویسیم. پس داریم:

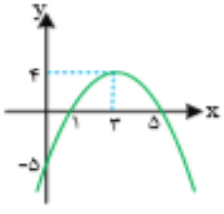
$$\begin{matrix}(-1,-8)\\(3,0)\end{matrix} \Rightarrow \text{شیب} = \frac{0-(-8)}{3-(-1)} = \frac{8}{4} = 2$$

$$\Rightarrow y-y_0 = m(x-x_0) \Rightarrow y-0 = 2(x-3) \Rightarrow y = 2x-6$$

پس ضابطه تابع $y=(f-g)(x)$ برابر با $2x-6$ است و با حل دستگاه، هر یک از توابع f و g را به دست آوریم. ببینید:

$$\begin{cases} f(x)+g(x)=4 \\ f(x)-g(x)=2x-6 \end{cases} \xrightarrow{(+)} 2f(x)=2x-2 \Rightarrow f(x)=x-1,\ g(x)=5-x$$

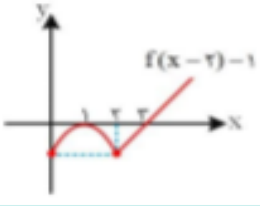
در آخر نمودار تابع $y=(f.g)(x)=(x-1)(5-x)$ به صورت مقابل است و همانطور که مشاهده می‌کنید از ناحیه دوم محورهای مختصات نمی‌گذرد.



گروه آموزشی ماز

۱۳۸- نمودار تابع $y=f(x-2)-1$ به صورت مقابل است. تعداد جواب‌های معادلهٔ $|x|+f(x)=1$ کدام است؟

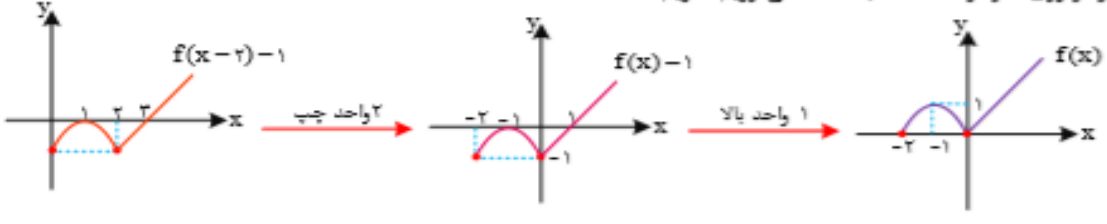
۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳



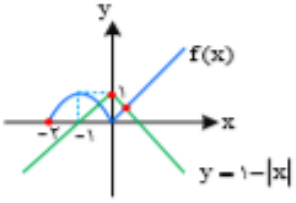
پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱ ـ صفحه ۱۱۱ تا ۱۱۶ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

ابتدا نمودار تابع $y=f(x)$ را از روی نمودار داده شده به دست می‌آوریم. داریم:



برای به دست آوردن جواب‌های معادله $|x|+f(x)=1$، ابتدا آن را به صورت $f(x)=1-|x|$ در نظر گرفته و سپس نمودار دو تابع $y=f(x)$ و $y=1-|x|$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. نقاط برخورد نمودار دو تابع تعداد جواب‌های معادله است:



همانطور که مشاهده می‌کنید نمودار توابع در دو نقطه متقاطع هستند پس معادله دو جواب دارد.

گروه آموزشی ماز

۱۳۹- نمودار تابع $y=|2x+1|-1$ را ۲ واحد در امتداد محور xها و در جهت مثبت و سپس ۳ واحد در امتداد محور yها و در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. اگر تابع به وجود آمده را $f(x)$ بنامیم، مجموعه جواب نامعادله $f(x)>3$ کدام است؟

۱) $\mathbb{R}-[2,3]$ ۲) $\mathbb{R}-[-3,-2]$ ۳) $\mathbb{R}-[1,2]$ ۴) $\mathbb{R}-[-2,-1]$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۱ ـ صفحه ۱۱۱ تا ۱۱۶ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

ابتدا ضابطه تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم. داریم:

$$y=|2x+1|-1 \xrightarrow[x\to x-2]{\text{۲ واحد راست}} y=|2(x-2)+1|-1=|2x-3|-1 \xrightarrow[+3]{\text{۳ واحد بالا}} f(x)=|2x-3|+2$$

در نتیجه برای به دست آوردن مجموعه جواب نامعادله $f(x)>3$ می‌توان نوشت:

$$|2x-3|+2>3 \Rightarrow |2x-3|>1 \Rightarrow \begin{cases} 2x-3>1 \to 2x>4 \to x>2 \\ \text{یا} \\ 2x-3<-1 \to 2x<2 \to x<1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbb{R}-[1,2]$$

گروه آموزشی ماز

۱۴۰- اگر f تابعی یک به یک و تساوی $f(x+2f(x))=f(2-3x)$ برقرار باشد، مساحت ناحیه محدود به نمودار تابع $f(x)$ و محورهای مختصات کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ ۲) $\frac{1}{4}$ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۲ ـ صفحه ۵۹ تا ۶۴ ـ متوسط)

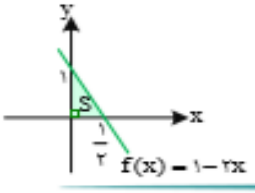
پاسخ تشریحی:

می‌دانیم تابع یک‌به‌یک به ازای هر خروجی دقیقاً یک ورودی دارد، پس می‌توان نوشت:

$$f(x+2f(x))=f(2-3x) \xrightarrow{\text{f یک‌به‌یک}} x+2f(x)=2-3x \Rightarrow 2f(x)=2-4x \Rightarrow f(x)=1-2x$$

در نتیجه برای محاسبه خواسته مسئله، داریم:

$$S=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times 1=\frac{1}{4}$$



گروه آموزشی ماز

۱۴۱- با فرض $f(x)=\frac{x-a}{3}$، اگر برد تابع $y=f^{-1}(x)-bx$ مجموعه تک عضوی $\{6-a\}$ باشد، ab کدام است؟ $(D_f=\mathbb{R})$

۱) ۹ ۲) ۹- ۳) ۱۲ ۴) ۱۲-

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۱ ـ صفحه ۱۱۰ / ریاضی ۲ ـ صفحه ۶۱ تا ۶۴ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

ابتدا وارون تابع خطی f را به دست می‌آوریم. داریم:

$$y=\frac{x-a}{3} \Rightarrow x-a=3y \Rightarrow x=3y+a \xrightarrow{\text{تعویض جای x و y}} f^{-1}(x)=3x+a$$

حالا ضابطه تابع $y=f^{-1}(x)-bx$ را به دست می‌آوریم:

$$y=3x+a-bx \Rightarrow y=(3-b)x+a$$

می‌دانیم برای این که برد تابع یک مجموعه تک عضوی باشد باید تابع ثابت باشد که در این صورت $3-b=0$ و در نتیجه $b=3$ می‌شود، در نتیجه ضابطه تابع به صورت $f(x)=a$ خواهد شد و چون طبق فرض مسئله برد تابع $\{6-a\}$ است، برای به دست آوردن مقدار a می‌توان نوشت:

$$a=6-a \Rightarrow 2a=6 \Rightarrow a=3$$

در آخر خواسته مسئله $ab=3\times 3=9$ است.

گروه آموزشی ماز

۱۴۲- قرینه نمودار تابع $y=(x-2)^3-2$ نسبت به محور xها را $f(x)$ می‌نامیم، مجموع جواب‌های معادله $f(x)=f^{-1}(x)$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۲۴ تا ۲۹ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

ابتدا ضابطه تابع $f(x)$ را به دست می‌آوریم. پس داریم:

$$y=(x-2)^3-2 \xrightarrow[y(-1)]{\text{قرینه نسبت به محور xها}} y=2-(x-2)^3 \Rightarrow f(x)=2-(x-2)^3$$

حالا برای به دست آوردن ضابطه وارون این تابع می‌توان نوشت:

$$y=2-(x-2)^3 \Rightarrow (x-2)^3=2-y \xrightarrow{\sqrt[3]{\ }} x-2=\sqrt[3]{2-y} \Rightarrow x=2-\sqrt[3]{y-2} \xrightarrow{\text{تعویض جای x و y}} y=f^{-1}(x)=2-\sqrt[3]{x-2}$$

پس برای به دست آوردن جواب‌های معادله $f(x)=f^{-1}(x)$ از برابر قرار دادن ضابطه دو تابع داریم:

$$\cancel{2}-(x-2)^3=\cancel{2}-\sqrt[3]{x-2} \rightarrow (x-2)^3=\sqrt[3]{x-2} \Rightarrow \begin{cases} x-2=0 \rightarrow x=2 \\ x-2=1 \rightarrow x=3 \\ x-2=-1 \rightarrow x=1 \end{cases}$$

در نتیجه مجموع جواب‌های معادله $2+3+1=6$ است.

گروه آموزشی ماز

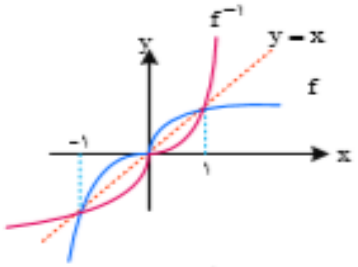
۱۴۳- اگر $f(x)=\begin{cases} \sqrt{x} & x\geq 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$ و مجموعه جواب نامعادله $f(x)\geq f^{-1}(x)$ به صورت $[a,b]$ باشد، بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۲۷ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

نمودار توابع $f(x)$ و $f^{-1}(x)$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. (توجه داشته باشید نمودار یک تابع و وارون آن نسبت به خط $y=x$ قرینه هستند.) پس داریم:



همانطور که مشاهده می‌کنید نمودار تابع $f(x)$ در بازهٔ $[-1,1]$ بالاتر یا مساوی تابع $f^{-1}(x)$ است، پس مجموعه جواب نامعادله $f(x)\geq f^{-1}(x)$ برابر با $[-1,1]$ و در نتیجه خواسته مسئله $b-a=1-(-1)=2$ است.

گروه آموزشی ماز

۱۴۴- اگر $f(x)=g(x)+\sqrt{g(x)}$ و $g^{-1}(x)=\sqrt[3]{3x}$ باشند، $f^{-1}(12)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۲۴ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

فرض می‌کنیم $f^{-1}(12)=\alpha$ باشد، پس $f(\alpha)=12$ است و در نتیجه داریم:

$$f(x)=g(x)+\sqrt{g(x)} \xrightarrow{x=\alpha} f(\alpha)=g(\alpha)+\sqrt{g(\alpha)}=12 \Rightarrow g(\alpha)=9$$

در آخر با توجه به معلوم بودن ضابطه $g^{-1}(x)$ برای به دست آوردن مقدار α می‌توان نوشت:

$$g(\alpha)=9 \Rightarrow \alpha=g^{-1}(9)=\sqrt[3]{f(9)}=\sqrt[3]{27}=3$$

گروه آموزشی ماز

۱۴۵- اگر $f(x)=x+4\sqrt{x+3}$ به طوری که $f^{-1}(2)=a$، مقدار $f(-\frac{a}{2})$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۴-

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۲۴ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

ابتدا a را بدست می‌آوریم به طوری که:

$$f^{-1}(2)=a \Rightarrow f(a)=2$$

$$a+4\sqrt{a+3}=2 \Rightarrow 4\sqrt{a+3}=2-a \quad a\le 2$$

$$16a+48=a^2-4a+4 \Rightarrow a^2-2a-44=0$$

$$(a-22)(a+2)=0 \Rightarrow \begin{cases} a=22 & \text{غ ق ق} \\ a=-2 \end{cases}$$

حال مقدار $f(-\frac{a}{2})$ را بدست می‌آوریم:

$$\Rightarrow f(-\frac{a}{2})=f(1)=1+4\sqrt{4}=9$$

گروه آموزشی ماز

۱۴۶- هرگاه $f(5-3x)=g(2x+5)$، مقدار $f^{-1}og(2)$ چه عددی است؟ $(D_f=\mathbb{R})$

۱) ۱/۵- ۲) ۹/۵ ۳) ۷/۵ ۴) ۴/۵

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۲۴ تا ۲۹ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

برای یافتن $g(2)$ کافی است قرار دهیم:

$$2x+5=2 \Rightarrow x=-\frac{3}{2}$$

با قرار دادن $x=-\frac{3}{2}$ داریم:

$$f(5-3\times\frac{-3}{2})=g(2) \Rightarrow f(9/5)=g(2)$$

$$\Rightarrow f^{-1}og(2)=f^{-1}of(9/5)=9/5$$

گروه آموزشی ماز

۱۴۷- هرگاه $f(x)=\sqrt{a-x}$ به طوری که $D_{fof}=[-6,a]$، دامنه تابع fof شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۱۲ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۰-

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۴ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$D_{fof}=\{x: x\in D_f, f(x)\in D_f\}$$
$$x\in D_f \Rightarrow x\le a$$
$$f(x)\in D_f \Rightarrow \sqrt{a-x}\le a \Rightarrow a-x\le a^2 \Rightarrow x\ge a-a^2$$

توجه: چون $\sqrt{a-x}\le a$ است پس $a\ge 0$ است.

$$a-a^2=-6 \Rightarrow a^2-a-6=0 \Rightarrow \begin{cases} a=3 \\ a=-2 \end{cases} \Rightarrow a=3$$

پس $D_{fof}=[-6,3]$، پس دامنه fof شامل ۱۰- عدد صحیح است.

گروه آموزشی ماز

۱۴۸- با فرض آن‌که $f(x)=x+4\sqrt{x-3}$ به طوری که $f^{-1}(x)=x+b-4\sqrt{x-a}$، مقدار $a+b$ کدام عدد است؟

۱) ۷ ۲) ۷- ۳) ۹ ۴) ۹-

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۲۹ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

می‌توانیم وارون تابع را بدست آوریم:

$$f(x)=x-3+4\sqrt{x-3}+4-1$$
$$f(x)=(\sqrt{x-3}+2)^2-1 \Rightarrow y+1=(\sqrt{x-3}+2)^2 \Rightarrow \pm\sqrt{y+1}=\sqrt{x-3}+2$$

چون $\sqrt{x-3}+2>0$، پس $\sqrt{y+1}=\sqrt{x-3}+2$ قابل قبول است.

$$\Rightarrow \sqrt{y+1}-2=\sqrt{x-3} \Rightarrow x-3=(\sqrt{y+1}-2)^2$$
$$f^{-1}(x)=(\sqrt{x+1}-2)^2+3$$
$$f^{-1}(x)=x+1+4-4\sqrt{x+1}+3=x-4\sqrt{x+1}+8$$
$$\Rightarrow a=-1,\ b=8 \Rightarrow a+b=7$$

گروه آموزشی ماز

۱۴۹- اگر $A(2,3)$ روی نمودار تابع $y=f(x)$ باشد و نقطه متناظر آن روی نمودار $y=\alpha-2f(\beta-x)$ نقطه $A'\left|\begin{matrix}-1\\-4\end{matrix}\right.$ باشد، مقدار $\beta-\alpha$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۲- ۴) ۱-

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۵ تا ۲۳ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

چون $A(2,3)$ روی نمودار f است، پس $f(2)=3$ به همین جهت وقتی $A'\left|\begin{matrix}-1\\-4\end{matrix}\right.$ روی نمودار $y=\alpha-2f(\beta-x)$ است، پس:

$$-4=\alpha-2f(\beta+1) \Rightarrow f(\beta+1)=\frac{\alpha+4}{2}$$
$$\beta+1=2 \Rightarrow \beta=1$$
$$\frac{\alpha+4}{2}=3 \Rightarrow \alpha=2 \Rightarrow \beta-\alpha=-1$$

گروه آموزشی ماز

۱۵۰- هرگاه نمودار تابع $f(x)=x^3+x$ را یک واحد به راست و هشت واحد به پایین انتقال دهیم به تابع g می‌رسیم. حاصل $g^{-1}of(1)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۲۴ و ۲۹ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$g(x)=(x-1)^3+(x-1)-8$

$f(1)=2 \Rightarrow g^{-1}of(1)=g^{-1}(2)$

$g^{-1}(2)=\alpha \Rightarrow g(\alpha)=2 \Rightarrow (\alpha-1)^3+(\alpha-1)-8=2 \xrightarrow{\alpha-1=t} t^3+t=10 \Rightarrow t=2 \xrightarrow{t=\alpha-1} \alpha=3$

$g(3)=2 \Rightarrow g^{-1}(2)=3$

گروه آموزشی ماز

۱۵۱- تابع $y=x(ax+10-a)$ در بازهٔ $(-\infty,-2)$ اکیداً یکنوا است. حدود a کدام است؟

۱) $0 \le a \le 2$ ۲) $-2 \le a \le 2$ ۳) $a \ge 2$ یا $a \le 0$ ۴) $a \le -2$ یا $a \ge 0$

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۸ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

ابتدا f را ساده می‌کنیم، پس: $f(x)=ax^2+(10-a)x$

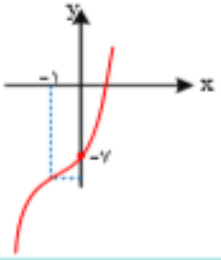
قرار است این سهمی در بازه $(-\infty,-2)$ اکیداً یکنوا باشد، پس باید رأس سهمی از -2 کمتر نباشد:

$-\frac{b}{2a} \ge -2 \Rightarrow \frac{a-10}{2a} \ge -2 \Rightarrow \frac{a-10}{2a}+2 \ge 0 \Rightarrow \frac{5a-10}{2a} \ge 0 \Rightarrow a \ge 2$ یا $a<0$

از طرفی اگر $a=0$ باشد $f(x)=10x$ خواهد بود که این تابع در فاصله $(-\infty,-2)$، اکیداً یکنواست.

گروه آموزشی ماز

۱۵۲- نمودار تابع $f(x)=(x+a)^3+b$ به صورت مقابل است. مقدار $f^{-1}(-1)$ کدام است؟



۱) $\sqrt[3]{9}-1$

۲) $\sqrt[3]{7}-1$

۳) $\sqrt[3]{7}+1$

۴) $\sqrt[3]{9}+1$

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحه ۱۰ و ۲۴ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

ابتدا ضابطه f را بدست می‌آوریم و داریم:

$f(0)=-7 \Rightarrow a^3+b=-7$

از طرفی مشخص است که تابع یک واحد به سمت چپ منتقل شده، پس: $a=1$

$f(x)=(x+1)^3-8$

فرض می‌کنیم $f^{-1}(-1)=\alpha$، پس $f(\alpha)=-1$

$(\alpha+1)^3-8=-1 \Rightarrow (\alpha+1)^3=7 \Rightarrow \alpha=\sqrt[3]{7}-1$

گروه آموزشی ماز

www.mapedu.ir

۱۵۳- نقطه $A(1,1)$ روی نمودار تابع $g(x)=f(x-1)$ و نقطه $B(\alpha,\beta)$ نقطه متناظر آن روی وارون تابع $h(x)=2f(-\left|\frac{x}{2}\right|+2)$ است. $\alpha-\beta$ کدام است؟

۱) ۲- یا ۶ ۲) ۶- یا ۶ ۳) ۲- یا ۶- ۴) ۶ یا ۶

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۵ تا ۲۱ و ۲۴ تا ۲۷ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$g(1)=1 \Rightarrow f(-)=1 \Rightarrow A(-,1)\in y=f(x)$$

$$-\left|\frac{x}{2}\right|+2=- \Rightarrow x=\pm 4 \Rightarrow A'(\pm 4,2)\in h(x)=2f(-\left|\frac{x}{2}\right|+2)$$

$$\Rightarrow A''(2,\pm 4)\in h^{-1} \Rightarrow \alpha=2,\beta=\pm 4 \Rightarrow \alpha-\beta=-2 \text{ یا } 6$$

گروه آموزشی ماز

۱۵۴- در نمودار تابع $f(x)=\frac{3x^2-2x-1}{x^2+x-2}$، ابتدا طول نقاط را نصف کرده و سپس قرینه نمودار حاصل را نسبت به محور yها به دست آورده و نمودار حاصل را یک واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا به تابع $g(x)$ برسیم. حاصل $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} g(x)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$ ۳) $-\frac{1}{3}$ ۴) $-\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۵ تا ۲۱ ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

$$\xrightarrow{x\to 2x} y=\frac{3(2x)^2-2(2x)-1}{(2x)^2+(2x)-2}=\frac{12x^2-4x-1}{4x^2+2x-2}\xrightarrow{x\to -x} y=\frac{12x^2+4x-1}{4x^2-2x-2}$$

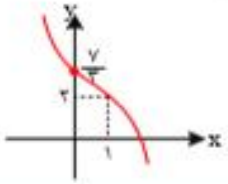
$$\xrightarrow{\text{یک واحد پایین}} y=\frac{12x^2+4x-1}{4x^2-2x-2}-1=\frac{8x^2+6x+1}{4x^2-2x-2}=g(x)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{8x^2+6x+1}{4x^2-2x-2}=\frac{-}{-} \Rightarrow \lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{(2x+1)(4x+1)}{(2x+1)(2x-2)}=\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\frac{4x+1}{2x-2}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$$

توجه: می‌توانستیم حد تابع $f(x)$ را وقتی $x\to 1$ حساب کرده و حاصل را یک واحد کم کنیم.

گروه آموزشی ماز

۱۵۵- نمودار تابع $f(x)=(ax+b)^3+c$ به شکل مقابل بوده و نسبت به نقطه $(1,2)$ متقارن است. مقدار $f(-1)$ کدام است؟



۱) $\frac{10}{3}$

۲) $\frac{14}{3}$

۳) $\frac{11}{3}$

۴)

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۳ تا ۵ ـ ساده)

پاسخ تشریحی:

$$ax+b \xrightarrow{x=1} a+b=- \Rightarrow a=-b\ ,\ f(1)=2 \Rightarrow c=2$$

$$\Rightarrow f(x)=(ax-a)^3+2 \xrightarrow{f(0)=\frac{7}{3}} -a^3+2=\frac{7}{3} \Rightarrow a=-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

$$\Rightarrow f(x)=(-\sqrt[3]{\frac{1}{3}}x+\sqrt[3]{\frac{1}{3}})^3+2 \Rightarrow f(-1)=(2\sqrt[3]{\frac{1}{3}})^3+2=8(\frac{1}{3})+2=\frac{14}{3}$$

۱۵۶- به ازای چند مقدار منفی a تابع $y=(a^2-4)x^3+(a+2)x$ یکنواست؟

۱) هیچ ۲) ۳) ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ _ صفحات ۶ تا ۹ _ دشوار)

پاسخ تشریحی:

تابع $y=ax^3+bx$ در حالت $ab<0$ غیریکنواست.

شرط صعودی اکید بودن $\Rightarrow \begin{cases} a^2-4>0 \to a>2 \text{ یا } a<-2 \xrightarrow{\text{اشتراک}} a>2 \\ a+2>0 \end{cases}$

شرط نزولی اکید بودن $\Rightarrow \begin{cases} a^2-4<0 \to -2<a<2 \xrightarrow{\text{اشتراک}} \varnothing \\ a+2<0 \to a<-2 \end{cases}$

شرط غیریکنوا بودن $(a^2-4)(a+2)<0 \Rightarrow (a+2)^2(a-2)<0 \Rightarrow a-2<0 \Rightarrow a<2$

$\begin{cases} a=2 \to y=4x \to \text{صعودی اکید} \to \text{یکنوا} \\ a=-2 \to y=0 \to \text{هم صعودی و هم نزولی} \to \text{یکنوا} \end{cases}$

پس اگر $a\geq 2$ یا $a=-2$ باشد، تابع یکنوا خواهد بود و پاسخ گزینه ۲ است.

گروه آموزشی ماز

۱۵۷- برد تابع $y=-1+\sqrt{4-x^2}$ کدام بازه زیر است؟

۱) $[-1,1]$ ۲) $[0,2]$ ۳) $(-1,1)$ ۴) $(0,2)$

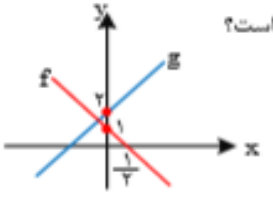
پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ _ صفحات ۱۱ تا ۱۴ _ ساده)

پاسخ تشریحی:

$4-x^2\leq 4 \Rightarrow 0\leq\sqrt{4-x^2}\leq 2 \Rightarrow -1\leq -1+\sqrt{4-x^2}\leq 1 \Rightarrow -1\leq y\leq 1$

گروه آموزشی ماز

۱۵۸- نمودارهای توابع f و g به شکل مقابل هستند. بیشترین مقدار تابع $y=(f.g)(x)$ گذرنده از نقطه $(1,-3)$ کدام است؟



۱) $\frac{15}{4}$ ۲) $\frac{15}{8}$ ۳) $\frac{25}{4}$ ۴) $\frac{25}{8}$

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۱ _ صفحات ۱۰۹ تا ۱۱۳ _ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$y=(f.g)(x)=f(x).g(x)=(-2x+1)(ax+2) \xrightarrow[y=-3]{x=1} -3=(-1)(a+2) \Rightarrow a=1 \Rightarrow y=(-2x+1)(x+2)$

$x_S=\frac{\frac{1}{2}+(-2)}{2}=-\frac{3}{4}$, $y_S=\frac{5}{2}\times\frac{5}{4}=\frac{25}{8}$

گروه آموزشی ماز

۱۵۹- فرض کنید زوج مرتب $(4a^2+1, \frac{|a|}{2(a^2-1)})$ به ازای جمیع مقادیر a، (به جز ±۱) متعلق به تابع $y=f(x)$ است. اگر $f(x)=\frac{\sqrt{x+b}}{x+c}$، مقدار $b+c$ کدام است؟

۱) -6 ۲) -8 ۳) -4 ۴)

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۱ ـ صفحات ۹۷ تا ۹۹ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی

$$\left.\begin{array}{l} f(4a^2+1)=\frac{|a|}{2(a^2-1)} \\ 4a^2+1=t \to a=\pm\frac{\sqrt{t-1}}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow f(t)=\frac{\frac{\sqrt{t-1}}{2}}{2(\frac{t-1}{4}-1)}=\frac{\frac{\sqrt{t-1}}{2}}{\frac{t-5}{2}}=\frac{\sqrt{t-1}}{t-5}$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{x-5} \Rightarrow \begin{cases} b=-1 \\ c=-5 \end{cases} \Rightarrow b+c=-6$$

گروه آموزشی ماز

۱۶۰- تابع $f(x)=x^2-4x+1$ در بازه‌های $(-\infty,a]$ و $[a,+\infty)$ یک‌به‌یک است. مقدار $f^{-1}(a-1)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}$ یا ۰ ۲) ۰ یا $\frac{3}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ یا $\frac{1}{2}$ ۴) یا ۰

پاسخ: گزینه ۴ (ریاضی ۲ ـ صفحات ۵۹ تا ۶۳ ـ ساده)

پاسخ تشریحی

a فقط می‌تواند طول رأس سهمی باشد.

$$a=\frac{-(-4)}{2(1)}=2 \Rightarrow a-1=2-1=1$$

$$x^2-4x+1=1 \Rightarrow x^2-4x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=4 \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۱۶۱- وارون‌های دو تابع $f(x)=\frac{4x+2}{x-3}$ و $g(x)=\frac{3x+2}{x-1}$ در دو نقطه به طول‌های α و β یکدیگر را قطع می‌کنند. $\alpha+\beta$ کدام است؟

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) $\frac{5}{2}$ ۳) ۴)

پاسخ: گزینه ۲ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۲۴ تا ۲۸ ـ دشوار)

پاسخ تشریحی

کافی است عرض‌های تقاطع برخورد f و g را به دست آوریم:

$$\frac{3x+2}{x-1}=\frac{4x+2}{x-3} \Rightarrow 3x^2-7x-6=4x^2-12x-2$$

$$\Rightarrow x^2+5x+4=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \to f(-1)=\frac{1}{2}=\alpha \\ x=-4 \to f(-4)=2=\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha+\beta=\frac{5}{2}$$

گروه آموزشی ماز

۱۶۲- در چند نقطه به طول طبیعی، نمودار توابع $f(x)=\log_3^{(2x-1)}$ و $g(x)=\left|x^2-5x+2\right|$ زیر خط $y=2$ قرار دارند؟

۱) صفر ۲) ۳) ۴)

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۱ ـ صفحات ۸۸ تا ۹۱ ـ متوسط)

پاسخ تشریحی:

$$\log_3^{(2x-1)}<2 \Rightarrow 0<2x-1<3^2 \Rightarrow \frac{1}{2}<x<5 \ (1)$$

$$\left|x^2-5x+2\right|<2 \Rightarrow -2<x^2-5x+2<2 \Rightarrow \begin{cases} x^2-5x+2<2 \rightarrow 0<x<5 \ (2) \\ x^2-5x+2>-2 \rightarrow x>4 \text{ یا } x<1 \ (3) \end{cases}$$

$$(1)\cap(2)\cap(3) \Rightarrow \frac{1}{2}<x<1 \cup 4<x<5 \Rightarrow$$ گزینه ۱

گروه آموزشی ماز

۱۶۳- تابع $f(x)=\dfrac{ax^4+x+a}{3x^4+\frac{3}{2}x-b}$ در هر بازه، هم صعودی و هم نزولی است. دامنه تابع $y=\sqrt{\dfrac{x^3+ax^2+bx}{3-|x|}}$، شامل چند عدد صحیح مثبت است؟

۱) ۲) ۳) ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۳ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۶ تا ۱۰ و ریاضی ۱ ـ صفحات ۱۰۱ تا ۱۰۵ ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

تابع $f(x)$ باید تابع ثابت باشد، پس:

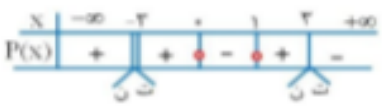
$$\frac{a}{3}=\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{a}{-b} \Rightarrow a=2, b=-3$$

$$y=\sqrt{\frac{x^3+2x^2-3x}{3-|x|}} \Rightarrow P(x)=\frac{x^3+2x^2-3x}{3-|x|}=\frac{x(x^2+2x-3)}{3-|x|} \Rightarrow P(x)\geq 0$$

ریشه‌ها $\Rightarrow 0, 1, -3, 3$

-3، هم ریشه ساده صورت و هم ریشه ساده مخرج است، پس $P(x)$ در -3 تغییر علامت نمی‌دهد.

$$P(x)\geq 0 \Rightarrow x\in(-\infty,-3)\cup(-3,0]\cup[1,3)$$



اعداد صحیح مثبت ۱ و ۲ درون دامنه هستند. بنابراین گزینه ۳ صحیح است.

گروه آموزشی ماز

۱۶۴- وارون تابع $f(x)=2x^2+a\ ,\ (x>0)$ را دو واحد به چپ منتقل می‌کنیم. سپس طول نقاط نمودار به دست آمده را تقسیم بر ۲ می‌کنیم تا به تابع $g(x)$ برسیم. اگر $g(x)$ وارون تابع f را در نقطه‌ای به طول $\frac{a}{2}$ قطع کند، تابع $\frac{1}{f(x)}$ را چند واحد باید به راست منتقل کنیم، تا تابع حاصل، تابع $y=\frac{2f^{-1}(x)-5}{2}$ را در نقطه‌ای به طول $-a$ قطع کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱ (ریاضی ۳ ـ صفحات ۱۵ تا ۲۱ و ۲۴ تا ۲۸ ـ دشوار)

پاسخ تشریحی:

$$y=f^{-1}(x)\xrightarrow{x\to x+2}y=f^{-1}(x+2)\xrightarrow{x\to 2x}y=f^{-1}(2x+2)=g(x)$$

$$\Rightarrow g(x)=f^{-1}(2x+2)=f^{-1}(x)\xrightarrow{f^{-1}\text{ یک‌به‌یک است}}2x+2=x\Rightarrow x=-2=\frac{a}{2}\Rightarrow a=-4\Rightarrow f(x)=2x^2-4$$

$$\frac{1}{f(x-k)}=\frac{2f^{-1}(x)-5}{2}\xrightarrow{x=-a=4}\frac{1}{f(4-k)}=\frac{2f^{-1}(4)-5}{2}$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2(4-k)^2-4}=\frac{2(2)-5}{2}\Rightarrow 2(4-k)^2-4=-2\Rightarrow 4-k=\pm 1\Rightarrow\begin{cases}k=3\\k=5\end{cases}$$

(توجه: $f(x)=4\Rightarrow 2x^2-4=4\xrightarrow{x>0}x=2\Rightarrow f^{-1}(4)=2$)

گروه آموزشی ماز

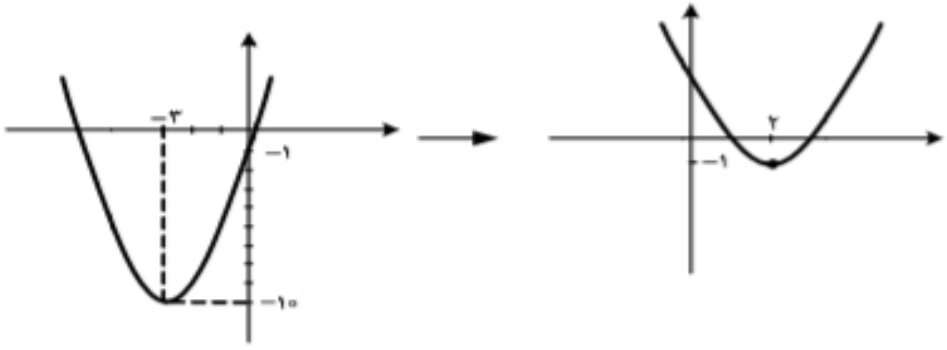
شرکت تعاونی خدمات آموزشی کارکنان
سازمان سنجش آموزش کشور

www.mapedu.ir

۱ . گزینه ۲ درست است.

حالت مربع کامل دو تابع به همراه نمودارشان به شکل زیر است:

$y = x^{۲} + ۶x - ۱ = (x+۳)^{۲} - ۱۰$ $\qquad$ $y = x^{۲} - ۴x + ۳ = (x-۲)^{۲} - ۱$



کافی است نمودار $y = x^{۲} + ۶x - ۱$، ۵ واحد به راست و ۹ واحد به بالا منتقل شود.

۲ گزینه ۱ درست است.

الف) تمام تابع‌ها به فرم زیر هستند.

$\{(۱,\square),(۳,\square),(۵,\square),(۷,\square)\}$

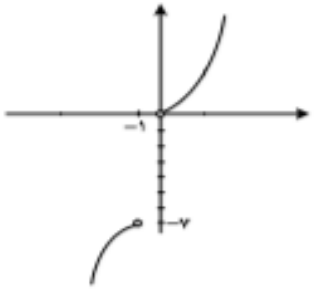
که در لانه‌ها a, b, c می‌تواند قرار بگیرد پس $۳\times۳\times۳\times۳ = ۸۱$ تابع می‌توان تعریف کرد.

ب) تمام تابع‌ها به فرم زیر هستند.

$\{(۱,\square),(۳,\square),(۵,\square),(۷,\square),(۹,\square)\}$

که در لانه‌ها حروف a, b, c, d, e, f به فرم بدون تکرار می‌توانند قرار بگیرد.

$۶\times۵\times۴\times۳\times۲ = ۷۲۰$



ج) نمودار تابع به فرم زیر است:

که با توجه به نمودار برد تابع $R - [-۷, ۰]$ است که برابر دامنه تابع معکوس می‌باشد، پس نقاط $۰, -۱, -۲, \ldots, -۷$ یعنی ۸ نقطه صحیح در آن وجود ندارد.

۳ گزینه ۳ درست است.

$$f(x) = ۲x + \sqrt{۲x} = (\sqrt{۲x} + \tfrac{۱}{۲})^{۲} - \tfrac{۱}{۴} \Rightarrow y + \tfrac{۱}{۴} = (\sqrt{۲x} + \tfrac{۱}{۲})^{۲} \Rightarrow \sqrt{۲x} = \sqrt{\frac{۴y+۱}{۴}} - \tfrac{۱}{۲} \Rightarrow$$

$$۲x = \frac{۴y+۱+۱-۲\sqrt{۴y+۱}}{۴} \Rightarrow x = \tfrac{۱}{۴}(۲y - \sqrt{۴y+۱} + ۱) \Rightarrow f^{-۱}(x) = \tfrac{۱}{۴}(۲x - \sqrt{۴x+۱} + ۱)$$

چون $x \geq ۰$، پس $y \geq ۰$ و $f^{-۱}(x) \geq ۰$ است.

۴ گزینه ۱ درست است.

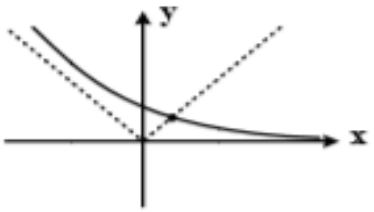
الف) $y=[x]+[-x]$ به ازای $x\in z$ برابر صفر و به ازای $x\notin z$ برابر (-1) است، پس تابعی ثابت نیست.

ب) $-[x]^2+3[x]-2=-([x]-1)([x]-2)>0\Rightarrow 1\le[x]\le 2$

$\Rightarrow [x]=1$ یا $2\Rightarrow y=0$ تابعی ثابت است.

ج) تابع نیست. $x=0\Rightarrow [y]=-1\Rightarrow -1\le y<0$

۵ گزینه ۱ درست است.



یا رسم نمودارهای هر دو تابع، در یک نقطه متقاطع اند.

۶ گزینه ۴ درست است.

$\begin{cases}2-m=3\\ m=3\end{cases}\Rightarrow$ دو معادله جواب مشترک ندارند.

هیچ مقدار m

۷ گزینه ۳ درست است.

$f(x)=|2x-7|-|2x+2|\le|2x-7-(2x+2)|=9$

۸ گزینه ۴ درست است.

سه نامعادله به صورت‌های $x^2-4>0$، $2-x\ge 0$، $x+2\ge 0$ فاقد جواب است. پس دامنه تابع $\varnothing$ است.

۹ گزینه ۲ درست است.

$[x]\le x<[x]+1\Rightarrow 0\le x-[x]<1$

برد تابع مفروض بازه $[0,1)$ است.

۱۰ گزینه ۱ درست است.

$y=(x-1)^2+(x-1)+2\Rightarrow y=x^2-x+2$

۱۱ گزینه ۳ درست است.

برای مقادیر $x>0$ همواره $x+\frac{1}{x}\ge 2$ و برای مقادیر $x<0$ همواره $x+\frac{1}{x}\le -2$ پس دامنه تابع f در خارج $(-2,2)$ است به صورت $\mathbb{R}-(-2,2)$

۱۲ گزینه ۴ درست است.

$2y=2^x+2^{-x}\Rightarrow 2^{2x}-2y2^x+1=0\Rightarrow 2^x=y+\sqrt{y^2-1}$

چون $x>0$ الزاماً $2^x>1$ و علامت مثبت اختیار می‌شود پس $U=x+\sqrt{x^2+1}$

۱۳ گزینه ۲ درست است.

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x-1})=(1-x+1)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2-x}}$$

از دو نامعادلهٔ $x-1\geq 0$ و $2-x>0$ خواهیم داشت $1\leq x<2$ یا بازهٔ $[1,2)$ است.

۱۴ . گزینه ۲ درست است.

$$(fog)(x)=(2x-5)^2-(2x-5)=4x^2-22x+30,(gof)(x)=2x^2-2x-5$$

$$4x^2-22x+30=2x^2-2x-5\Rightarrow x^2-10x+17/5=0\Rightarrow x=5\pm\sqrt{7/5}$$

۱۵ گزینه ۱ درست است.

در تابع $y=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ مقادیر y,x هم علامت‌اند.

$$y^2=\frac{x^2}{1+x^2}\Rightarrow x^2(1-y^2)=y^2\Rightarrow x=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

۱۶ گزینه ۳ درست است.

دو زوج مرتب یا مولفه اول برابر باید مولفه دوم برابر نیز داشته باشند.

$$(3,m^2-5)=(3,3-2m)$$

$m^2-5=3-2m$ $\quad$ $m^2+2m-8=(m+4)(m-2)=0$

$m=2\Rightarrow 2m-3=1$ $\quad$ $m^2-2m=24$ $\quad$ $(2,1)\neq(1,4)$ $\quad$ پس تابع نیست

$m=-4\Rightarrow 2m-3=-11$ $\quad$ $m^2-2m=24$ $\quad$ تابع است

۱۷ . گزینه ۱ درست است.

$$f(g(x))=\frac{4x-4}{2x+3}\ ,\ g^{-1}(x)=\frac{x-1}{2}$$

$$\frac{4x-4}{2x+3}=\frac{x-1}{2}\Rightarrow 2x^2-7x+5=0\Rightarrow x=1,\frac{5}{2}$$

۱۸ . گزینه ۳ درست است.

$f(a)=0$ می‌شود پس داریم:

$$a^3-3a^2+a+a=0\Rightarrow a^3-3a^2+2a=0\Rightarrow a(a^2-3a+2)=0$$

$$a=0\Rightarrow f(x)=x(x^2-3x+1)$$

$$a=1\Rightarrow f(x)=(x-1)(x^2-2x-1)$$

$$a=2\Rightarrow f(x)=(x-2)(x^2-x-1)$$

۱۹. گزینه ۱ درست است.

$$۲x^۲-۳x-۱=۲(x-\frac{۳}{۴})^۲-\frac{۱۷}{۸}\ ,\ ۲x-۱=\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲}\Rightarrow x=\frac{۳}{۴}-\frac{\sqrt{۵}}{۴}$$

$$f(\frac{۱-\sqrt{۵}}{۲})=۲(\frac{۳}{۴}-\frac{\sqrt{۵}}{۴}-\frac{۳}{۴})^۲-\frac{۱۷}{۸}=\frac{۵}{۸}-\frac{۱۷}{۸}=-۱/۵$$

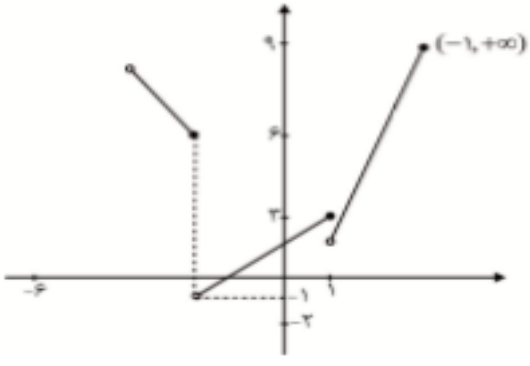
۲۰. گزینه ۳ درست است.

$$f(x)=ax+b\ ,\ g(x)=۲xf(x)-x+۱=۲۵+۱+(۲b-۱)x+۱$$

$$\begin{cases}۵=g(۲)-g(۳)=-۱۰a-۲b+۱\Rightarrow a=-\frac{۱}{۲},\ b=\frac{۱}{۲}\\ ۷=g(۳)-g(۴)=-۱۴a-۲b+۱\Rightarrow g(۵)=۲(-\frac{۱}{۲})(۲۵)+۱=-۲۴\end{cases}$$

۲۱. گزینه ۴ درست است.

نمودار تابع را رسم می‌کنیم.



$$\Rightarrow R=(-۱,+\infty)$$

۲۲. گزینه ۱ درست است.

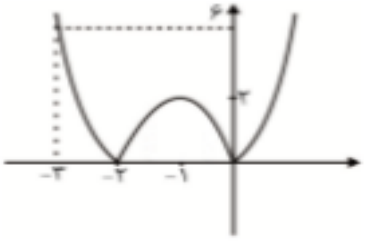
$$f(x)=\left|۲[(x+۱)^۲-۱]\right|=۲\left|x^۲+۲x\right|$$

$$y=\frac{۵}{۲}\left|x+۱\right|+۱$$

$$۲(x^۲+۲x)=\frac{۵}{۲}x+\frac{۷}{۲}\Rightarrow ۲x^۲+\frac{۳}{۲}x-\frac{۷}{۲}=۰\Rightarrow x=۱$$

$$۲(x^۲+۲x)=-\frac{۵}{۲}x-\frac{۳}{۲}\Rightarrow ۲x^۲+\frac{۱۳}{۲}x+\frac{۳}{۲}=۰\Rightarrow x=-۳$$

$$\Rightarrow ۱+(-۳)=-۲$$



۲۳ گزینه ۴ درست است.

$$(y-x)^۲=x^۲-۱\Rightarrow y^۲-۲xy+۱=۰\Rightarrow x=\frac{y}{۲}+\frac{۱}{۲y}\ ,\ x<-۱\Rightarrow y<۰\ \text{و}\ y>-۱$$

$$\Rightarrow f^{-۱}(x)=\frac{x}{۲}+\frac{۱}{۲x}\ ,\ -۱<x<۰$$

۲۴ گزینه ۳ درست است.

$$g(x)=ax+b \Rightarrow f(ax+b)=a^{۲}x^{۲}+(۲ab-a)x+b^{۲}-b$$
$$a^{۲}=۴ \Rightarrow a=۲ \Rightarrow b=۱$$
$$a=-۲ \Rightarrow b=۰$$

پس $g(x)=۲x+۱$ و $g(x)=-۲x$ و گزاره نادرست است.

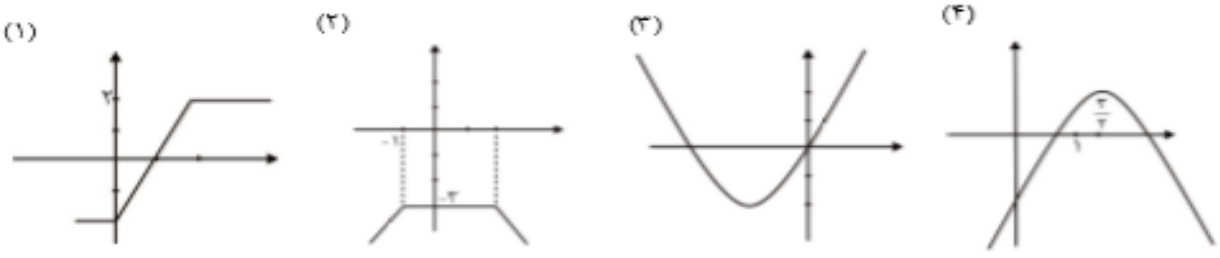
$$f(x)=۲x \neq g(x)=\frac{۱۱}{۲} \Rightarrow fog(x)=gof(x)=x$$

و نادرست است.

$$|x-۱| \leq ۲ \Rightarrow -۲ \leq x-۱ \leq ۲ \Rightarrow -۱ \leq x \leq ۳$$

گزاره پ درست است.

۲۵ گزینه ۲ درست است.



۲۶ گزینه ۱ درست است.

نمودار مربوط به $f(x)=|x|-[x]$ می‌باشد زیرا:

$$-۱ \leq x < ۰ \rightarrow \begin{cases}[x]=-۱\\ |x|=-x\end{cases} \Rightarrow y=-x+۱ \; ; \; \begin{array}{c|cc} x & -۱ & ۰ \\ \hline y & ۲ & ۱ \end{array}$$

توپر توخالی

$$۰ \leq x < ۱ \rightarrow \begin{cases}[x]=۰\\ |x|=x\end{cases} \Rightarrow y=x \; ; \; \begin{array}{c|cc} x & ۰ & ۱ \\ \hline y & ۰ & ۱ \end{array}$$

توپر توخالی

$x=۱ \rightarrow y=۰$ نقطهٔ توپر

۲۷ گزینه ۳ درست است.

$$(f^{-۱}og^{-۱})(k)=۵ \rightarrow (gof)^{-۱}(k)=۵ \rightarrow (gof)(۵)=k$$
$$g(f(۵))=k \qquad g(۷)=k \qquad ۸=k$$

۲۸ گزینه ۲ درست است.

اگر $(۳,۲)$ بر وارون تابع واقع باشد آن‌گاه $(۲,۳)$ بر روی تابع اصلی واقع است در نتیجه:

$$۲^{۳}-۲+k=۳ \rightarrow k=-۳$$

بنابراین: $f(x)=x^{۳}-x-۳$

$$f(-۱)+f(۰)=(-۳)+(-۳)=-۶$$

۲۹ . گزینه ۳ درست است.

با توجه به نمودار و طبق تعریف وارون:

$$(f^{-1}of)(x)=x; x\in D_f$$

$$D_f=(-\infty,1]$$

بنابراین ضابطه‌های $f(x)=x+1$ با دامنه R و $f(x)=\sqrt{x}-1$ با دامنهٔ $[0,+\infty)$ و نیز $f(x)=1-\sqrt{x-1}$ با دامنهٔ $[1,+\infty)$ حذف می‌شوند. فقط $f(x)=1-\sqrt{1-x}$ با دامنه $(-\infty,1]$ می‌تواند جواب سؤال باشد.

۳۰ . گزینه ۱ درست است.

$$(fog)(x)=x^2+2x+4$$

$$f(g(x))=x^2+2x+4$$

$$f(x)=x^2-4x+7$$

$$\underbrace{g^2(x)-4g(x)+7}_{\downarrow}=\underbrace{x^2+2x+4}_{\downarrow}$$

$$(g(x)-2)^2-4+7=(x+1)^2-1+4$$

$$(g(x)-2)^2=(x+1)^2$$

$$g(x)-2=\pm(x+1)\begin{cases}\nearrow g(x)=x+3\\ \searrow g(x)=-x+1\end{cases}$$

مجموع دو ضابطهٔ نهایی برای $g(x)$ برابر ۴ می‌باشد.

۳۱ گزینه ۳ درست است.

در تابع $f^{-1}(x)$، جای دامنه و برد نسبت به $f(x)$ عوض می‌شود. بنابراین برد تابع $f(x)$ یعنی $\left(-\infty,-\frac{1}{5}\right]\cup\left[\frac{1}{5},+\infty\right)$ همان دامنهٔ $f^{-1}(x)$ است. فقط عدد $\left(\frac{-1}{7}\right)$ در بین گزینه‌های داده شده، در این بازه حضور ندارد.

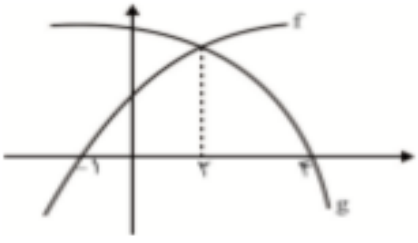
۳۲ گزینه ۴ درست است.

تابع‌های یک به یک شامل $(a,1)$ کل تابع‌های یک به یک

$$\overbrace{5\times4\times3\times2} - \overbrace{4\times3\times2} = 120-24=96$$

۳۳.گزینه ۴ درست است.

ابتدا نموداری برای دو تابع فرض می‌کنیم:



	$-\infty$		-1		2		4		$+\infty$
f(x)		−	۰	+		+	۰	+	
g(x)		+		+		+	۰	−	
f(x)-g(x)		−		−	۰	+		+	
		+	۰	−	ت ن	+	۰	−	

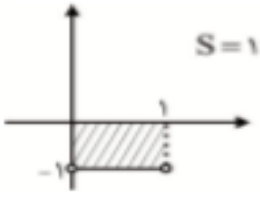
$$D=(-\infty,-1]\cup(2,4]$$

۳۴ گزینه ۲ درست است.

$$g(x)=[x]+[-x]=\begin{cases}0 & x\in\mathbb{Z}\\ -1 & x\notin Z\end{cases}$$

$$D_{gof}=\left\{x \,\middle|\, x\in[0,1],\sqrt{x-x^2}\in\mathbb{R}\right\}=[0,1]$$

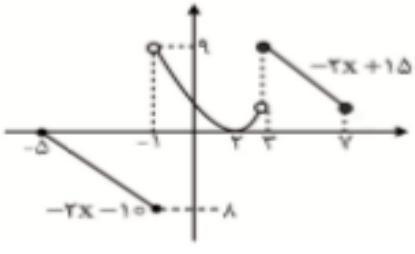
$$\Rightarrow gof=\begin{cases}0 & x=0 \text{ یا } 1\\ -1 & x\in(0,1)\end{cases}$$



$S=1\times1=1$

۳۵ . گزینه ۴ درست است.

با توجه به شکل برد تابع شامل اعداد صحیح ۹ تا ۸− یعنی ۱۸ عدد صحیح است.



۳۶ . گزینه ۳ درست است.

$$fof^{-1}(x)=x\Rightarrow fof^{-1}(x)+f(x)=4x-1, x=\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow a=f^{-1}(5)\Rightarrow 3a-1=5\Rightarrow a=2\Rightarrow f^{-1}(5)=2$$

۳۷ . گزینه ۴ درست است.

$$fog(x)=\frac{1}{\sqrt{g(x)+1}}+1=\frac{x-1}{x+1}\Rightarrow\frac{1}{g(x)+1}=\left(\frac{-2}{x+1}\right)^2\Rightarrow g(x)=\frac{1}{4}(x+1)^2-1$$

۳۸. گزینه ۳ درست است.

ابتدا ضابطهٔ تابع جدید را به دست می‌آوریم:

$$y=(x-1)^2+3(x-1)+5-7 \Rightarrow y=x^2+x-4$$

چون نمودار جدید در بازهٔ (۳ , ۱) زیر تابع خطی $f(x)=ax+b$ قرار دارد، پس $f(x)$ از نقاط (۲− , ۱) و (۸ , ۳) می‌گذرد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} f(1)=-2 \Rightarrow a+b=-2 \\ f(3)=8 \Rightarrow 3a+b=8 \end{cases} \Rightarrow a=5, b=-7 \Rightarrow f(x)=5x-7 \Rightarrow f(2)=3$$

۳۹. گزینه ۲ درست است.

واضح است که $f(2)-g(2)=0$ است، پس:

$$f(2)-g(2)=0 \Rightarrow 12+2m+n=0$$

از طرفی معادلهٔ $3x^2+mx+n=0$ باید ریشهٔ مضاعف داشته باشد، پس:

$$\Delta=0 \Rightarrow m^2-4(3)(n)=0 \Rightarrow m^2-12(-12-2m)=0 \Rightarrow m^2+24m+144=0$$
$$\Rightarrow (m+12)^2=0 \Rightarrow m=-12$$

۴۰. گزینه ۳ درست است.

$$(g+f^{-1})(3)=g(3)+f^{-1}(3)$$

با فرض $g(3)=m$ و $f^{-1}(3)=n$ داریم:

$$g^{-1}(m)=3 \Rightarrow \frac{2m+4}{m-3}=3 \Rightarrow 2m+4=3m-9 \Rightarrow m=13$$
$$f(n)=3 \Rightarrow 2n+1=3 \Rightarrow n=1$$

بنابراین $(g+f^{-1})(3)=14$ است.

۴۱. گزینه ۳ درست است.

چون دامنه تابع یازدهٔ $(-\frac{۱}{۲},+\infty)$ است، پس $a=۰$ است. از طرفی داریم:

$$bx+۱>۰ \Rightarrow x>-\frac{۱}{b} \Rightarrow -\frac{۱}{b}=-\frac{۱}{۲} \Rightarrow b=۲$$

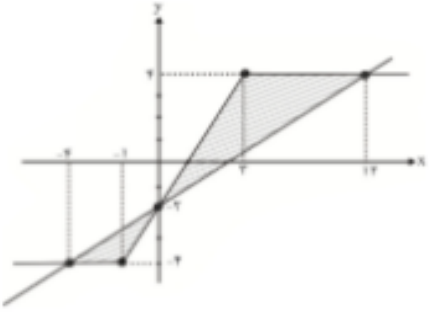
حال چون $f(۴)=۲$ است، پس:

$$\frac{c}{\sqrt{۲(۴)+۱}}=۲ \Rightarrow \frac{c}{۳}=۲ \Rightarrow c=۶$$

بنابراین $b+c=۸$ می‌باشد.

۴۲- گزینه ۳ درست است.

با رسم دو نمودار داریم:



$$S=\frac{۱}{۲}\times۳\times۲+\frac{۱}{۲}\times۹\times۶=۳+۲۷=۳۰$$

۴۳. گزینه ۴ درست است.

اگر $f^{-۱}(۴)=m$ باشد، $f(m)=۴$ است. پس:

$$f(m)=۴ \Rightarrow \frac{۹^m-۱}{۳^m}=۴ \xrightarrow{۳^m=t} \frac{t^۲-۱}{t}=۴ \Rightarrow t^۲-۴t-۱=۰$$

$$\Rightarrow t=۲+\sqrt{۵}\ ,\ t=۲-\sqrt{۵}$$

$$t=۲+\sqrt{۵} \Rightarrow ۳^m=۲+\sqrt{۵} \Rightarrow \log_۳^{۳^m}=\log_۳^{۲+\sqrt{۵}} \Rightarrow m=\log_۳^{(۲+\sqrt{۵})}$$

۴۴. گزینه ۳ درست است.

ابتدا $fog(x)$ را می‌سازیم:

$$fog(x)=f(g(x))=\frac{x+1}{2x-1}$$

حال نامعادله را حل می‌کنیم:

$$1<fog(x)<3\Rightarrow 1<\frac{x+1}{2x-1}<3\Rightarrow 1-\frac{1}{2}<\frac{3}{2(2x-1)}<3-\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}<\frac{1}{2x-1}<\frac{5}{3}\Rightarrow \frac{3}{5}<2x-1<3\Rightarrow \frac{8}{5}<2x<4\Rightarrow \frac{4}{5}<x<2$$

$$\Rightarrow (a,b)=(\frac{4}{5},2)\Rightarrow b-a=2-\frac{4}{5}=\frac{6}{5}=1/2$$

۴۵. گزینه ۴ درست است.

$$f(x)=\frac{3x+4}{x+m}\xrightarrow{(2,-10)}-10=\frac{10}{2+m}\Rightarrow m=-3$$

در تابع $f(x)=\frac{3x+4}{x-3}$ چون $3+(-3)=0$ پس $f^{-1}(x)=f(x)$ می‌باشد. از طرفی می‌دانیم $fof^{-1}(x)=x$ است. پس:

$$fof^{-1}(x)+f^{-1}(x)=x\Rightarrow x+\frac{3x+4}{x-3}=x\Rightarrow x=-\frac{4}{3}$$

۴۶. گزینه ۲ درست است.

$$(g^{-1}of)^{-1}(x)=\frac{1}{x+1}\Rightarrow (f^{-1}og)(x)=\frac{1}{x+1}\Rightarrow f^{-1}(g(x))=\frac{1}{x+1}\Rightarrow g(x)=f(\frac{1}{x+1})$$

حال $f(3)$ را می‌خواهیم، بنابراین داریم:

$$\frac{1}{x+1}=3\Rightarrow x+1=\frac{1}{3}\Rightarrow x=-\frac{2}{3}\Rightarrow f(3)=g(-\frac{2}{3})=\frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{2}{3}+3}=-\frac{2}{7}$$

۴۷ گزینه ۳ درست است.

فرض می‌کنیم $fog^{-1}(x)$ محور x ها را به طول m قطع کند، پس:

$$fog^{-1}(m)=0\Rightarrow f(g^{-1}(m))=0\xrightarrow{2x-8=0\Rightarrow x=4}g^{-1}(m)=4\Rightarrow$$
$$g(4)=m\Rightarrow 4+\sqrt{4}=m\Rightarrow m=6$$

۴۸ . گزینه ۳ درست است.

$$f^{-1}(x)=x-3\Rightarrow x=f(x-3)\Rightarrow x=(x-3)^2-3(x-3)-2$$
$$\Rightarrow x=x^2-6x+9-3x+9-2\Rightarrow x^2-10x+16=0\Rightarrow (x-2)(x-8)=0\xrightarrow{x\geq 3}x=8$$

بنابراین نقطهٔ تلاقی $A(8,5)$ است. پس:

$$OA=\sqrt{64+25}=\sqrt{89}$$

۴۹ گزینه ۴ درست است.

باید دامنه و برد تابع $f(x)$ برابر باشند. در گزینه‌ها فقط دامنه و برد تابع $f(x)=3x+\sqrt{x}$ با هم برابرند.

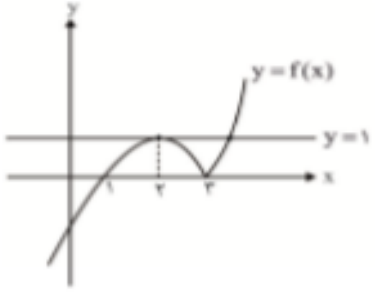
۵۰. گزینه ۲ درست است.

$$(g^{-1}of)^{-1}(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f^{-1}og(x)=\frac{1}{x}\Rightarrow f^{-1}(g(x))=\frac{1}{x}\Rightarrow g(x)=f(\frac{1}{x})$$

$$\Rightarrow f(\frac{1}{x})=\frac{x+2}{x+3}\xrightarrow{\frac{1}{x}=t}f(t)=\frac{\frac{1}{t}+2}{\frac{1}{t}+3}\Rightarrow f(x)=\frac{\frac{1}{x}+2}{\frac{1}{x}+3}$$

$$\Rightarrow 3x^2-x-1=0\Rightarrow f(x)=x\Rightarrow\frac{\frac{1}{x}+2}{\frac{1}{x}+3}=x\Rightarrow\frac{1}{x}+2=1+3x\Rightarrow 3x-\frac{1}{x}-1=0\ \text{مجموع}=\frac{1}{3}$$

۵۱. گزینه ۳ درست است.



می‌دانیم $g(1)=0$ است، پس جواب‌های معادلهٔ $gof(x)=0$ یا جواب‌های معادلهٔ $f(x)=1$ برابر است، بنابراین داریم:

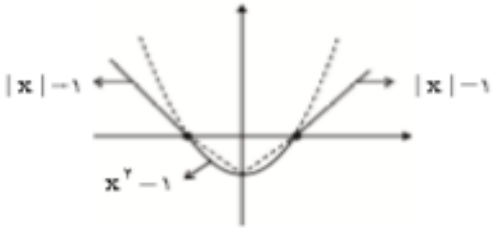
$$\Rightarrow (x-1)(x-3)=1\Rightarrow x^2-4x+2=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{4\pm\sqrt{8}}{2}\Rightarrow x=2+\sqrt{2}$$

بنابراین مجموع جواب‌ها برابر $4+\sqrt{2}$ است.

۵۲ گزینه ۴ درست است.

تابع است.



۵۳ گزینه ۱ درست است.

$$f(x)=\frac{x^2+2+1}{\sqrt{x^2+2}}=\sqrt{x^2+2}+\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}>2$$

$$x^2=0\Rightarrow\sqrt{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}\Rightarrow R_f=[\frac{3\sqrt{2}}{2},+\infty)$$

۵۴ گزینه ۲ درست است.

$$y = ۴x^۲ - ۴x + ۱ - ۳ \quad , \quad x \le ۰ \rightarrow y \ge -۳$$

$$y = (۲x - ۱)^۲ - ۳$$

$$(۲x - ۱)^۲ = y + ۳ \Rightarrow ۲x - ۱ = \begin{cases} \sqrt{y+۳} & \text{غ ق ق} \\ -\sqrt{y+۳} & \text{ق ق} \end{cases}$$

$$۲x = ۱ - \sqrt{y+۳} \Rightarrow x = \frac{۱ - \sqrt{y+۳}}{۲} \Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{۱ - \sqrt{x+۳}}{۲} \quad x \ge -۳$$

۵۵ گزینه ۳ درست است.

$$f(x) = \sqrt{x + ۲\sqrt{x-۱}} = \sqrt{(۱ + \sqrt{x-۱})^۲} = ۱ + \sqrt{x-۱} \ , \ x \ge ۱$$

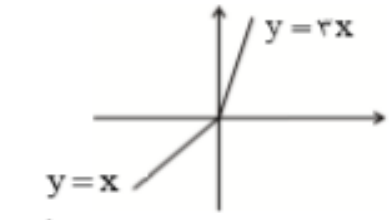
$$g(x) = \sqrt{x - ۲\sqrt{x-۱}} = \sqrt{(۱ - \sqrt{x-۱})^۲} = ۱ - \sqrt{x-۱}$$

$$۱ - \sqrt{x-۱} \ge ۰ \Rightarrow \sqrt{x-۱} \le ۱ \Rightarrow x - ۱ \le ۱ \Rightarrow x \le ۲$$

$$f(x) + g(x) = ۱ + \sqrt{x-۱} + ۱ - \sqrt{x-۱} = ۲$$

۵۶ گزینه ۱ درست است.

$$y = |x| + ۲x = \begin{cases} ۳x & x \ge ۰ \\ x & x < ۰ \end{cases}$$



یک به یک است

۵۷ گزینه ۴ درست است.

$$g(x) = ax^۲ + bx + c$$

$$\left.\begin{array}{l} (۰,-۲) \in g \Rightarrow -۲ = c \\ (۲,۰) \in g \Rightarrow ۴a + ۲b - ۲ = ۰ \\ x_۰ = -\dfrac{b}{۲a} = ۰ \Rightarrow b = ۰ \Rightarrow a = \dfrac{۱}{۲} \end{array}\right\} g(x) = \frac{۱}{۲}x^۲ - ۲$$

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} \ , \ D_g = [۰,+\infty), D_f = (-\infty,۰)$$

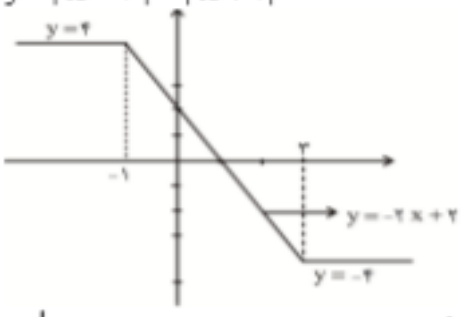
$$D_{fog} = \left\{[۰,+\infty) \mid \frac{۱}{۲}x^۲ - ۲ \in (-\infty,۰)\right\}$$

$$\frac{۱}{۲}x^۲ - ۲ < ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}x^۲ < ۲ \Rightarrow x^۲ < ۴ \Rightarrow -۲ < x < ۲$$

$$D_{fog} = \{[۰,+\infty) \cap (-۲,۲)\} = [۰,۲)$$

۵۸ . گزینه ۳ درست است.

$$y=|x-۳|-|x+۱|$$



x	$-\infty$		-۱		۳		$+\infty$
		$y=-x+۳+x+۱$		$y=-x+۳-x-۱$		$y=x-۳-x-۱$	
		$y=۴$		$y=-۲x+۲$		$y=-۴$	
			$y=۴$		$y=-۴$		

۵۹ . گزینه ۴ درست است.

$$\underset{(۳,۲)}{f^{-۱}} \leftrightarrow \underset{(۲,۳)}{f} \quad \Rightarrow ۳=۲^۳-۲+۲K-۱۷ \rightarrow \boxed{K=۷}$$

$$\boxed{f(x)=x^۳-x-۳}$$

$$f(۲)-f(-۲)=۳-(-۹)=۱۲$$

۶۰. گزینه ۱ درست است.

$$D_{f^{-۱}}=R_f \Rightarrow \sqrt{x-۲}\geq ۰ \Rightarrow -\sqrt{x-۲}\leq ۰$$

$$۲K-\sqrt{x-۲}\leq ۲K \xrightarrow{R_f=(-\infty,۳]\ \text{چون}} ۲K=۳ \rightarrow \boxed{f(x)=۳-\sqrt{x-۲}}$$

$$f^{-۱}(۱)=? \Rightarrow ۳-\sqrt{x-۲}=۱ \rightarrow x=۶ \rightarrow f^{-۱}(۱)=۶$$

$$f(۳)=۲ \rightarrow f^{-۱}(۱)+f(۳)=۶+۲=۸$$

۶۱. گزینه ۲ درست است.

$$\begin{cases} x^۲-۳x>۰ \rightarrow (-\infty,۰)\cup(۳,+\infty) \quad ① \\ ۱-\log(x^۲-۳x)\geq ۰ \rightarrow \log_{۱۰}(x^۲-۳x)\leq ۱ \rightarrow x^۲-۳x\leq ۱۰ \end{cases}$$

$$\rightarrow x^۲-۳x-۱۰\leq ۰ \rightarrow [-۲,۵] \quad ②$$

① و ② اشتراک $\Rightarrow D_f=[-۲,۰)\cup(۳,۵] \rightarrow$ این بازه شامل ۴ عدد صحیح ۲− و ۱− و ۴ و ۵ است.

۶۲. گزینه ۳ درست است.

چون f همانی است، پس $f(O)=O$، یعنی:

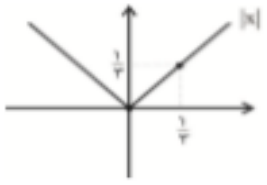
$$3x^2-[x]=[-x]+4x \Rightarrow 3x^2-4x=[x]+[-x]$$

تابع $y=[x]+[-x]$ تابع معروفی است که به‌ازای اعداد صحیح، خروجی صفر و به‌ازای اعدا غیرصحیح، خروجی ۱− می‌دهد. پس دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x\in z:\quad 3x^2-4x=0 \Rightarrow x(3x-4)=0 \Rightarrow x=\begin{cases}0\\ \frac{4}{3}\end{cases}$$ غ ق ق

$$x\notin z:\quad 3x^2-4x=-1 \Rightarrow 3x^2-4x+1=0 \Rightarrow x=\begin{cases}1\\ \frac{1}{3}\end{cases}$$ غ ق ق

در واقع تابع f، یک تابع همانی دو عضوی به‌صورت $f=\left\{(0,0),(\frac{1}{3},\frac{1}{3})\right\}$ است و با توجه به نمودارهای زیر، دو تلاقی در همین دو نقطه با نمودار $g(x)=|x|$ دارد:



۶۳. گزینه ۲ درست است.

تساوی $fof^{-1}=f^{-1}of$ موقعی برقرار است که دامنه و برد تابع f باهم برابر باشند:

$$\begin{cases}D_f:\quad 2x-k\ge 0 \Rightarrow x\ge \frac{k}{2}\\ R_f:\quad y\ge 2\end{cases} \qquad \Rightarrow \frac{k}{2}=2 \Rightarrow k=4$$

پس $f(x)=2+\sqrt{2x-4}$ و از آنجا که تابعی اکیداً صعودی است، تقاطع آن با وارونش حتماً روی خط $y=x$ بوده و کافی‌است معادله $f(x)=x$ را حل کنیم:

$$2+\sqrt{2x-4}=x \Rightarrow \sqrt{2x-4}=x-2 \xrightarrow{\text{توان دو}} 2x-4=x^2-4x+4$$

$$\Rightarrow x^2-6x+8=0 \Rightarrow x=2,4$$

هر دو جواب به‌دست آمده قابل قبول هستند و لذا محل تقاطع توابع f, f^{-1}، نقاط (۲و۲) و (۴و۴) است که چون نقطه با طول کمتر مدنظر است: $A(2,2)$

برای پیدا کردن نقطه B که متناظر با نقطه A روی نمودار $g(x)=-2f(3-x)+4$ است، کافی است:

از طول نقطه A، ابتدا ۳ واحد کم کرده و سپس آن را بر ۱− تقسیم کنیم:

$$2 \xrightarrow{-3} -1 \xrightarrow{\div -1} 1$$

عرض نقطه A را ابتدا ۲− برابر کرده و سپس ۴ واحد به آن اضافه کنیم:

$$2 \xrightarrow{\times -2} -4 \xrightarrow{+4} 0$$

پس $B(1,0)$ بوده و طول پاره‌خط AB برابر با فاصله دو نقطه $A(2,2)$ و $B(1,0)$ است:

$$AB=\sqrt{(2-1)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}$$

۶۴. گزینه ۳ درست است.

تابع درجه دو هرگز بر روی R یک به یک و وارون پذیر نیست. یعنی این تابع نمی‌تواند درجه دو باشد:

$$m+۴=۰ \Rightarrow m=-۴$$

بنابراین با تابع خطی $f(x)=(n+۱)x-۴-n+۲k$ طرفیم.

می‌دانیم تلاقی تابع خطی و وارونش حتماً روی خط $y=x$ قرار دارد، مگر تابع خطی با شیب ۱- که خودش و وارونش برابر بوده و بی‌شمار نقطه تلاقی دارند.

در اینجا چون نقطه تلاقی $(-۱,۷)$ است که روی خط $y=x$ نیست، نتیجه می‌گیریم این تابع خطی دارای شیب ۱- بوده و در تمام نقاط واقع بر آن، از جمله در $(-۱,۷)$ وارونش را قطع می‌کند. پس:

شیب خط: $-۱ \Rightarrow n+۱=-۱ \Rightarrow n=-۲$

$$f(x)=(n+۱)x-۴-n+۲k \xrightarrow{n=-۲} =-x-۴-(-۲)+۲k \Rightarrow f(x)=-x-۲+۲k$$

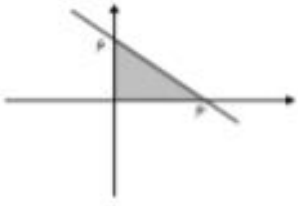
حالا نقطه $(-۱,۷)$ را در آن صدق می‌دهیم:

$$۷=-(-۱)-۲+۲k \Rightarrow ۲k=۸ \Rightarrow k=۴$$

$$f(x)=-x-۲+۲k \xrightarrow{k=۴} -x-۲+۸ \Rightarrow f(x)=-x+۶$$

چون f و $f^{-۱}$ باهم برابرند، پس:

$$f^{-۱}(x)=-x+۶$$



$$s=\frac{۶\times۶}{۲}=۱۸$$

۶۵ گزینه ۲ درست است.

در تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ در صورتی‌که $a+d=۰$ باشد، توابع f و $f^{-۱}$ باهم برابر بوده و نمودارهای آن‌ها برهم منطبق می‌شود، به عبارتی نمودار f نسبت به خط $y=x$ متقارن خواهد بود. پس در اینجا داریم:

$$a+d=۰ \Rightarrow m^۲+۲m-۱۵=۰ \Rightarrow m=-۵,۳$$

عجله نکنید! به ازای $m=۳$ تابع هموگرافیک فوق به صورت زیر در می‌آید:

$$f(x)=\frac{۹x+۹}{-۹x-۹}=\frac{۹\cancel{(x+۱)}}{-۹\cancel{(x+۱)}}=-۱ \qquad (x\neq-۱)$$

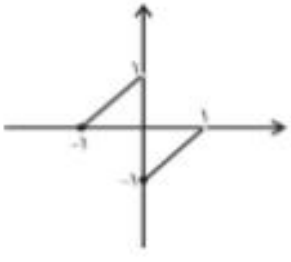
در واقع چون $ad-bc=۰$ می‌شود، تابع هموگرافیک به صورت تابع ثابت در می‌آید و وارون پذیر نمی‌شود که با فرض سوال در تناقض است.

پس فقط $m=-۵$ قابل قبول است.

۶۶ گزینه ۳ درست است.

فاصله $f(x)$ را ساده کرده و نمودار آن را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} x+۱ & -۱\leq x<۰ \\ x-۱ & ۰\leq x<۱ \end{cases}$$



واضح است که این تابع در فواصل $[-1,0)$ و $[0,1)$ اکیداً صعودی است، امّا به خاطر پرش نمودار از بالا به پایین در $x=0$، در کل بازه $[-1,1)$ غیر یکنواست.

حالا ضابطه $fof(x)$ را به دست می‌آوریم:

$$fof(x)=f(f(x))=\begin{cases} f(x)+1 & -1\le f(x)<0 \\ f(x)-1 & 0\le f(x)<1 \end{cases}$$

با توجه به نمودار:

$$\begin{cases} 0\le x<1 \Rightarrow -1\le f(x)<0 \ , & f(x)=x-1 \\ -1\le x<0 \Rightarrow 0\le f(x)<1 \ , & f(x)=x+1 \end{cases}$$

پس داریم:

$$f(f(x))=\begin{cases} (x-1)+1=x & 0\le x<1 \\ (x+1)-1=x & -1\le x<1 \end{cases}$$

پس $f(f(x))=x$ بوده و اکیداً صعودی است.

۶۷. گزینه ۴ درست است.

$$x\in(-\infty,\frac{1}{2})\Rightarrow |2x-1|=1-2x\Rightarrow f(x)=ax+3(1-2x)+b$$

$$\Rightarrow \left.\begin{cases} f(x)=(a-6)x+3+b \\ f(x)=x \ \text{تابع همانی} \end{cases}\right\}\Rightarrow a=7, b=-3$$

بنابراین $s(7,-3)$ رأس سهمی است. می‌دانیم هر سهمی به‌صورت $y=m(x-h)^2+K$ با شرط $m\neq 0$ دارای رأس به مختصات (h,K) و خط تقارن $x=h$ است:

$$y=m(x-7)^2-3 \xrightarrow{\text{گذرا بر } (0,46)} 46=m(0-7)^2-3 \to m=1$$

$$\Rightarrow y=1(x-7)^2-3 \to y=x^2-14x+46$$

x_1 و x_2 محل برخورد با محور xها از معادله $y=0$ یعنی $x^2-14x+46=0$ حاصل می‌شود که با استفاده از جمع و ضرب ریشه‌ها بدون حل معادله حاصل $x_1^3+x_2^3$ را به‌دست می‌آوریم:

$$x_1+x_2=\frac{-b}{a}=14=S$$

$$x_1x_2=\frac{c}{a}=46=P$$

$$x_1^3+x_2^3=S^3-3PS=14^3-3(46)(14)=812$$

۶۸. گزینه ۲ درست است.

با توجه به مفهوم قدرمطلق، تابع $f(x)$ را به‌صورت دو ضابطه‌ای تعریف می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases}(x-۲)^۲+۲x\ ;\ x<۰\\(x-۲)^۲-۲x\ ;\ x\geq ۰\end{cases}\rightarrow f(x)=\begin{cases}x^۲-۲x+۴;x<۰\\x^۲-۶x+۴;x\geq ۰\end{cases}$$

$$\begin{cases}x^۲-۲x+۴<۱۰-x\ ;\ x<۰\\x^۲-۶x+۴<۱۰-x\ ;\ x\geq ۰\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x^۲-x-۶<۰\ \ ;\ x<۰\\x^۲-۵x-۶<۰\ ;\ x\geq ۰\end{cases}$$

$$\rightarrow\begin{cases}-۲<x<۰\\۰\leq x<۶\end{cases}\longrightarrow -۲<x<۶$$

$$m \qquad n$$

$$۳n-۲m=۳(۶)-۲(-۲)=۲۲$$

۶۹ گزینه ۳ درست است.

شرط تساوی دو تابع **f** و **g**:

$$D_f=R-\{۶\}=Dg$$

$$x^۲+px+q=(x-۶)^۲=x^۲-۱۲x+۳۶\rightarrow \boxed{p=-۱۲},\ \boxed{q=۳۶}$$

از طرف دیگر باید ضابطه‌های **f** و **g** مساوی باشند:

$$\frac{m}{x-۶}=\frac{۳x+n}{(x-۶)^۲}\rightarrow\frac{m(x-۶)}{(x-۶)^۲}=\frac{۳x+n}{(x-۶)^۲}$$

$$\rightarrow mx-۶m=۳x+n$$

$$\boxed{m=۳}\qquad -۶(۳)=n\rightarrow\boxed{n=-۱۸}$$

$$\frac{p-q}{n+۴m}=\frac{-۱۲-۳۶}{-۱۸+۴(۳)}=\frac{-۴۸}{-۶}=۸$$

۷۰ گزینه ۴ درست است.

$$\begin{cases}x_۱<x_۲\\x_۱^۵<x_۲^۵\end{cases}\Rightarrow x_۱^۵+x_۱<x_۲^۵+x_۲\xrightarrow{+۳۲}$$

$$x_۱^۵+x_۱+۳۲<x_۲^۵+x_۲+۳۲$$

$$f(x_۱)<f(x_۲)$$

$f(x)$ تابع صعودی اکید است، بنابراین برای به‌دست آوردن نقطهٔ برخورد f با $f^{-۱}$ کافی است $f(x)=x$ را حل کنیم:

$$x^۵+x+۳۲=x\rightarrow x^۵=-۳۲\rightarrow x=-۲,\ y=-۲$$

$$\begin{cases}A\left|\begin{matrix}-۲\\-۲\end{matrix}\right.\Rightarrow OA=\sqrt{(-۲-۰)^۲+(-۲-۰)^۲}\Rightarrow\boxed{OA=۲\sqrt{۲}}\\O\left|{}^{۰}\right.\ \text{مبدأ}\end{cases}$$

۷۱. گزینه ۲ درست است.

$$\left.\begin{array}{l} D_f : ۴-x^۲ \geq ۰ \to -۲ \leq x \leq ۲ \\ D_g = \{-۳,-۲,۰\} \end{array}\right\} \Rightarrow D_{(g-f)\times ۲g} = D_f \cap D_g = \{-۲,۰\}$$

$$((g-f)\times ۲g)(-۲) = (۴-۰)\times ۲(۴) = ۳۲$$

$$((g-f)\times ۲g)(۰) = (۷-۲)\times ۲(۷) = ۷۰$$

مجموع مقادیر تابع موردنظر $= ۷۰+۳۲ = ۱۰۲$

۷۲. گزینه ۲ درست است.

$$y = x+۱ \begin{cases} \xrightarrow{\text{محل برخورد با محور xها}} A\Big|_{۰}^{-۱} \to ۰ = \log_۲^{(b-a)} \to b-a = ۱ \ (۱) \\ \xrightarrow{\text{محل برخورد با محور yها}} B\Big|_{۱}^{۰} \to ۱ = \log_۲^{b} \to \boxed{b=۲} \xrightarrow{\text{طبق } (۱)} \boxed{a=۱} \end{cases}$$

$$f(x) = \log_۲^{(x+۲)} \to y = \log_۲^{(x+۲)} \to ۲^y = x+۲$$

$$۲^y - ۲ = x \xrightarrow{\text{تغییر نام متغیر}} \boxed{f^{-۱}(x) = ۲^x - ۲}$$

۷۳. گزینه ۳ درست است.

مطابق فرض سؤال f تابع خطی است: $f(x) = ax+b$

$$-۱ \leq \sin\frac{x}{۲} \leq ۱ \begin{cases} \xrightarrow{\sin\frac{x}{۲}=-۱} \max(g(x)) = ۳۲ \to b = ۳۲ \quad \text{عرض از مبدأ} \ (۱) \\ \xrightarrow{\sin\frac{x}{۲}=۱} \min(g(x)) = ۲ \to a = ۲ \quad \text{شیب} \ (۲) \end{cases}$$

$$(۱),(۲) \Rightarrow f(x) = ۲x+۳۲$$

$$f(۳)\times g(-\frac{\pi}{۳}) = (۲(۳)+۳۲)\times((\frac{۱}{۲})(۲\sin(-\frac{\pi}{۶})-۳)) = ۳۸\times ۱۶ = ۶۰۸$$

۷۴. گزینه ۲ درست است.

$$f(x) = (x-۶)(x^۲+۱۲) = x^۳ - ۶x^۲ + ۱۲x - ۷۲$$

$$f(x) = (x-۲)^۳ - ۶۴ \xrightarrow{\text{وارون}} y+۶۴ = (x-۲)^۳$$

$$x-۲ = \sqrt[۳]{۶۴+y} \to x = ۲+\sqrt[۳]{۶۴+y}$$

$$f^{-۱}(x) = \underbrace{۲}_{b=۲} + \sqrt[۳]{\underbrace{۶۴}_{a=۶۴}+x}$$

$$a-b = ۶۴-۲ = ۶۲$$

۷۵. گزینه ۳ درست است.

$$\begin{cases} f(x)+\cancel{g(x)}=3x \\ f(x)-\cancel{g(x)}=4x^2+5x \end{cases}$$

$$2f(x)=4x^2+8x \rightarrow \boxed{f(x)=2x^2+4x} \qquad (1)$$

$$f(x)+g(x)=3x \xrightarrow{\text{جاگذاری } (1)} 2x^2+4x+g(x)=3x \rightarrow \boxed{g(x)=-2x^2-x} \ (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow (f\times g)_{(x)}=(2x^2+4x)\times(-2x^2-x)=\underbrace{\underset{a}{\underset{\downarrow}{-4x^4}}\ \underset{b}{\underset{\downarrow}{-10x^3}}\ \underset{c}{\underset{\downarrow}{-4x^2}}}_{\boxed{a+b+c=-18}}$$

۷۶. گزینه ۴ درست است.

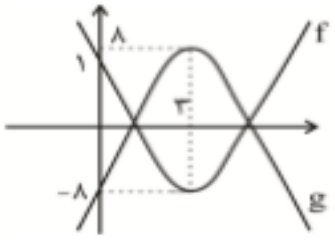
$$f(x)\ \text{دامنه}: \left.\begin{cases} x-1>0 \rightarrow x>1 \\ \log_2^{(x-1)}\geq 0 \rightarrow x-1\geq 2^0 \rightarrow x\geq 2 \end{cases}\right\} \Rightarrow D_F=[2,+\infty)$$

$$g(x)\ \text{دامنه}: -x^2+4x-4\geq 0 \rightarrow -(x-2)^2\geq 0 \rightarrow (x-2)^2\leq 0 \rightarrow x=2 \rightarrow D_g=\{2\}$$

$$\begin{aligned} D_{gaf} &= \{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\} \\ &= \left\{x\geq 2, \sqrt{\log_2^{(x-1)}}=2\right\} \\ &= \left\{x\geq 2, \log_2^{(x-1)}=4\right\} \\ &= \{x\geq 2, x=17\}=\{17\} \end{aligned}$$

۷۷. گزینه ۱ درست است.

نمودار تابع f و g را رسم می‌کنیم:



برای اینکه $h(x)$ نمودار f را قطع نکند باید g حداقل ۱۶ واحد به پائین در جهت محور عرض‌ها انتقال یابد. بنابراین $k<-16$ باشد.

۷۸. گزینه ۳ درست است.

کمترین و بیش‌ترین مقدار تابع $g(x)$ را محاسبه می‌کنیم.

$$g(x)=\frac{9^{2\cos^2 x}}{9}=9^{2\cos^2 x-1}=9^{\cos 2x}\rightarrow\begin{cases}\min g(x)=9^{-1}=\frac{1}{9}\\ \max g(x)=9^{1}=9\end{cases}$$

نقطه‌های $(1,\frac{1}{9})$ و $(21,9)$ روی نمودار تابع خطی $f(x)$ قرار دارند پس:

$$a=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{9-\frac{1}{9}}{21-1}=\frac{\frac{80}{9}}{20}=\frac{4}{9}$$

۷۹. گزینه ۲ درست است.

(۱) دامنه تابع جدید $3\le x\le 5\rightarrow 2\le x-1\le 4\xrightarrow{\text{در تابع جدید}}2\le 1-\frac{x}{2}\le 4\rightarrow -6\le x\le -2$

(۲) برد تابع جدید $-1\le 2f-3\le 3\rightarrow 1\le f\le 3\xrightarrow{\times(-3)}-9\le -3f\le -3\xrightarrow{-3}-12\le -3f-3\le -6$

(۱) و (۲) $\xrightarrow{\text{اجتماع}}[-12,-2]\rightarrow$ ۱۱ عدد صحیح

۸۰. گزینه ۲ درست است.

$$f(x)=\sqrt{1-x}-1\xrightarrow{\text{دامنه } f}1-x\ge 0\rightarrow D_f=(-\infty,1]$$

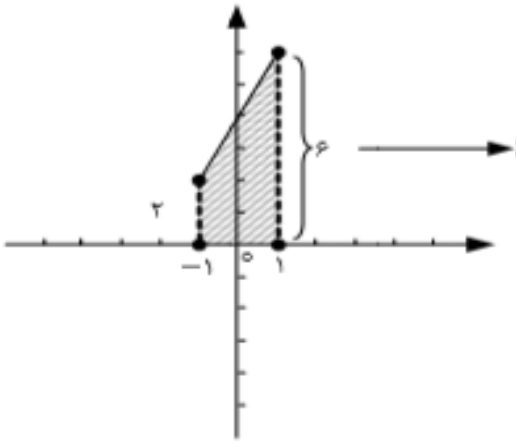
$$\sqrt{1-x}\ge 0\xrightarrow{\text{برد } f}\sqrt{1-x}-1\ge -1\Rightarrow R_f=[-1,+\infty)$$

$$f^{-1}of(x)=x;D_{f^{-1}of}=D_f=(-\infty,1]\ (1)$$

$$fof^{-1}(x)=x;D_{fof^{-1}}=D_{f^{-1}}=R_f=[-1,+\infty)\ (2)$$

$$(1)\text{ و }(2)\Rightarrow g(x)=x+x+4\rightarrow\begin{cases}g(x)=2x+4\\ D_g=D_f\cap R_f=[-1,1]\end{cases}$$

بنابراین نمودار خط $y=2x+4$ را در بازه $[-1,1]$ رسم کرده و مساحت محدود به آن و محور xها را حساب می‌کنیم:



$$S_{\text{ذوزنقه}}=\frac{(2+6)\times 2}{2}=8$$

۸۱. گزینه ۲ درست است.

ابتدا در تابع $y=\log_x(x-2)$ داریم:

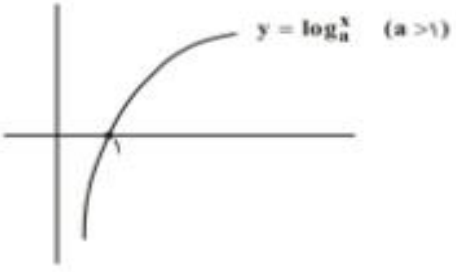
$$\begin{cases} x-2>0 \Rightarrow x>2 \\ x>0\ ,\ \ x\neq 1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} x>2$$

واضح است که وقتی $x>2$ است، عبارت $x-1$ نیز مثبت بوده و برای آن‌که عبارت زیر رادیکال، بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشد، کافی است:

$$\log_x^{x-2}\geq 0 \xrightarrow{\text{پایه}=x>2} x-2\geq 1 \Rightarrow x\geq 3$$

این بازه، فقط شامل دو عدد طبیعی $x=1,2$ نیست.

یادآوری:



$$y\geq 0 \Rightarrow x\geq 1$$

۸۲. گزینه ۱ درست است.

باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x^2-3x=x(x-3)$ برابر با $3x+1$ است. پس برای یافتن باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر هر یک از عوامل x و $x-3$ می‌توان باقی‌مانده تقسیم $3x+1$ بر آن‌ها را به‌دست آورد:

$$\begin{cases} \text{باقی‌مانده تقسیم } f(x) \text{ بر } x = \text{باقی‌مانده تقسیم } R(x)=3x+1 \text{ بر } x = R(0)=1 \Rightarrow f(0)=1 \\ \text{باقی‌مانده تقسیم } f(x) \text{ بر } x-3 = \text{باقی‌مانده تقسیم } R(x)=3x+1 \text{ بر } x-3 = R(3)=10 \Rightarrow f(3)=10 \end{cases}$$

حال با توجه به نمودار $f(x)$، ضابطه آن را به‌صورت $f(x)=(x-\alpha)^3+\beta$ در نظر می‌گیریم و داریم:

$$\begin{cases} f(0)=1 \Rightarrow (-\alpha)^3+\beta=1 \\ f(3)=10 \Rightarrow (3-\alpha)^3+\beta=10 \end{cases}$$

برای حل دستگاه، طرفین معادله پایین را از طرفین معادله بالا کم می‌کنیم:

$$(3-\alpha)^3-(-\alpha)^3=9 \Rightarrow (27-27\alpha+9\alpha^2-\alpha^3)+\alpha^3=9 \Rightarrow 9\alpha^2-27\alpha+18=0$$

$$\Rightarrow \alpha^2-3\alpha+2=0 \Rightarrow \alpha=1,2$$

با جایگذاری $\alpha = ۱$ در یکی از معادلات به $\beta = ۲$ و با جایگذاری $\alpha = ۲$ به $\beta = ۹$ می‌رسیم و لذا:

$$\left[\frac{\alpha-\beta}{۲}\right] \begin{cases} \xrightarrow[\beta=۲]{\alpha=1} = \left[\frac{-۱}{۲}\right] = -۱ \\ \xrightarrow[\beta=۹]{\alpha=۲} = \left[\frac{-۷}{۲}\right] = -۴ \end{cases}$$

پس مجموع مقادیر ممکن برابر با ۵- است.

۸۳. گزینه ۲ درست است.

با توجه به حضور زوج مرتب‌های $(۲,b)$ و $(۴,۵)$ در تابع اکیداً صعودی f، واضح است که $\boxed{b<۵}$

با توجه به حضور زوج مرتب‌های $(b,۳)$ و $(۴,۵)$ در تابع اکیداً صعودی f، واضح است که $\boxed{b<۴}$

حالا زوج مرتب‌های $(b,۳)$ و $(۲,b)$ را ببینید، دو حالت زیر متصور است:

$$\begin{cases} ۱)\ b<۲ \Rightarrow f(b)<f(۲) \Rightarrow ۳<b \xrightarrow[b<۲ \text{ یا اشتراک}]{} \varnothing \\ ۲)\ ۲<b \Rightarrow f(۲)<f(b) \Rightarrow b<۳ \xrightarrow[۲<b \text{ یا اشتراک}]{} \boxed{۲<b<۳} \end{cases}$$

از اشتراک سه بازه به دست آمده برای b، به بازه $۲<b<۳$ می‌رسیم و $[b]=۲$ است.

۸۴. گزینه ۳ درست است.

روش اول:

ابتدا دامنه توابع $f(x)$ و $g(x)$ را به‌دست می‌آوریم:

$f(۲x)=۳x-۱ \qquad ۱<x<۵ \Rightarrow ۲<۲x<۱۰$

پس $f(x)$: $\qquad ۲<x<۱۰ \rightarrow D_{f(x)}=(۲,۱۰)$

$g(x-۱)=۳x-۱ \qquad ۱<x<۵ \Rightarrow ۰<x-۱<۴$

پس $g(x)$: $\qquad ۰<x<۴ \rightarrow D_{g(x)}=(۰,۴)$

نهایتاً داریم:

$$D_{gof(x)}=\{x\in D_{f(x)} \mid f(x)\in D_{g(x)}\}=\{x\in(۲,۱۰) \mid f(x)\in(۰,۴)\}$$

دقت کنید که $f(۲x)=۳x-۱$ و در نتیجه $f(x)=\frac{۳}{۲}x-۱$ است، پس برای آنکه $f(x)\in(۰,۴)$ باشد، باید:

$$۰<\frac{۳}{۲}x-۱<۴ \Rightarrow ۱<\frac{۳}{۲}x<۵ \Rightarrow \frac{۲}{۳}<x<\frac{۱۰}{۳} \rightarrow x\in(\frac{۲}{۳},\frac{۱۰}{۳})$$

اشتراک بازه‌های $(۲,۱۰)$ و $(\frac{۲}{۳},\frac{۱۰}{۳})$ که بازه $(۲,\frac{۱۰}{۳})$ است، جواب تست است.

روش دوم:

می‌توانید با استفاده از جایگذاری از گزینه‌ها هم خیلی سریع به جواب برسید!

۸۵. گزینه ۳ درست است.

برای آن‌که تابع $f(x) = -3(\frac{4a+1}{a+2})^{3-x}$ اکیداً نزولی باشد، لازم است که تابع نمایی $y = (\frac{4a+1}{a+2})^{x}$ اکیداً نزولی باشد و برای این منظور باید:

$$0 < \frac{4a+1}{a+2} < 1$$

از حل این نامعادله به $\frac{-1}{4} < a < \frac{1}{3}$ می‌رسیم و از آنجا با تقسیم طرفین نامساوی بر ۲ داریم:

$$\frac{-1}{8} < \frac{a}{2} < \frac{1}{6} \Rightarrow \left[\frac{a}{2}\right] = -1, 0 \rightarrow \text{دو مقدار}$$

خیلی سبز!
آزمون
تجربی | ریاضی | انسانی

تست و پاسخ ۱

در کدام گزینه، دو تابع f و g مساوی‌اند؟

۱) $g(x)=|x|+1, f(x)=\frac{x^2-1}{|x|-1}$

۲) $g(x)=|x|-1, f(x)=\frac{x^2-1}{|x|+1}$

۳) $g(x)=|x|\sqrt{x}, f(x)=\sqrt{|x|^3}$

۴) $g(x)=x^3, f(x)=(\sqrt{x^3})^2$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره در سؤالات تساوی توابع، اول دامنه‌ها را مقایسه کنید؛ بعد اگر لازم شد سراغ مقایسهٔ ضابطه‌ها هم بروید.

خودت حل‌کنی بهتره دامنه را قبل از ساده‌کردن باید حساب کرد.

نکات توابع f و g با هم برابرند، اگر هر دو شرط زیر را داشته باشند:

۱) دامنه‌هایشان برابر باشد.

۲) ضابطه‌هایشان قابل تبدیل به هم باشد (یعنی بتوانیم قیافهٔ یکی را بعد از یک‌سری عمل جبری و ... مثل دیگری بنویسیم).

پاسخ تشریحی بررسی همهٔ گزینه‌ها:

۱) دامنهٔ هر دو تابع را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{|x|-1} \xrightarrow{\text{مخرج}\neq 0} |x|\neq 1 \Rightarrow x\neq \pm 1 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\pm 1\}$$

$$g(x)=|x|+1 \Rightarrow D_g=\mathbb{R}$$

چون دامنه‌ها برابر نیست، پس قطعاً دو تابع برابر نیستند.

۲) چون مخرج تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{|x|+1}$ صفر نمی‌شود، پس دامنهٔ f، $\mathbb{R}$ می‌شود.

دامنهٔ تابع $g(x)=|x|-1$ هم $\mathbb{R}$ است؛ پس شرط اول، یعنی تساوی دامنه‌ها برقرار است.

می‌دانیم $x^2=|x|^2$، پس:

$$f(x)=\frac{|x|^2-1}{|x|+1} \xrightarrow{\text{مزدوج}} f(x)=\frac{(|x|-1)\cancel{(|x|+1)}}{\cancel{|x|+1}}=|x|-1$$

ضابطهٔ f بعد از ساده‌شدن به شکل ضابطهٔ g درآمد، پس شرط دوم هم برقرار است و در نتیجه دو تابع با هم برابرند.

۳) تابع $f(x)=\sqrt{|x|^3}$ به ازای $x=-1$ تعریف می‌شود، ولی تابع $g(x)=|x|\sqrt{x}$ به ازای $x=-1$ تعریف نمی‌شود، پس قطعاً دامنه‌های دو تابع یکسان نیست و در نتیجه دو تابع برابر نیستند.

۴) تابع $f(x)=(\sqrt{x^3})^2$ به ازای $x=-1$ تعریف نمی‌شود، ولی تابع $g(x)=x^3$ به ازای $x=-1$ تعریف می‌شود، پس قطعاً دامنه‌های دو تابع یکسان نیست و در نتیجه دو تابع برابر نیستند.

تست و پاسخ ۲

اشتراک دامنه و برد تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{b-x}+a$، فاصلهٔ $[-1,2]$ است. حاصل $f(-\frac{1}{4})$ کدام است؟

۱) ۱/۲۵

۲) ۰/۷۵

۳) ۰/۵

۴) ۰/۲۵

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره سؤال دامنه و برد ساده‌ای است. با اطلاعات اولیه می‌توانید دامنه و برد این تابع را حساب کنید.

خودت حل‌کنی بهتره برای برد از «$\sqrt{\text{درجه‌یک}}\geq 0$» شروع کنید.

نکات

۱) دامنهٔ توابع به شکل $f(x)=\sqrt[\text{زوج}]{\quad}$ جواب نامعادلهٔ ≥ 0 است.

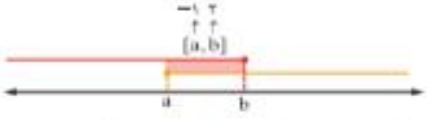
۲) برای محاسبهٔ برد، بعضی وقت‌ها از این نامساوی‌ها کمک می‌گیریم: $\sqrt{ax+b}\geq 0\ ,\ |ax+b|\geq 0\ ,\ (ax+b)^2\geq 0$

پاسخ تشریحی دامنه و برد تابع $f(x)=\sqrt{b-x}+a$ را حساب می‌کنیم:

دامنه: زیر رادیکال $\geq 0 \Rightarrow b-x\geq 0 \Rightarrow x\leq b \Rightarrow D_f=(-\infty,b]$

برد: $\xrightarrow[\text{نکتهٔ ۲}]{\text{با توجه به}} \sqrt{b-x}\geq 0 \xrightarrow{+a} \sqrt{b-x}+a\geq a \Rightarrow f(x)\geq a \Rightarrow R_f=[a,+\infty)$

اشتراک دو بازه به شکل $(-\infty,b]$ و $[a,+\infty)$ به صورت $[-1,2]$ شده است، پس باید $a=-1$ و $b=2$ باشد.



ضابطهٔ f به شکل روبه‌رو می‌شود:

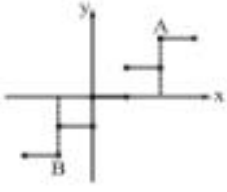
$$f(x)=\sqrt{b-x}+a \xrightarrow[b=2]{a=-1} f(x)=\sqrt{2-x}-1$$

پس:

$$f(\tfrac{-1}{4})=\sqrt{2-(\tfrac{-1}{4})}-1=\sqrt{\tfrac{9}{4}}-1=\tfrac{3}{2}-1=0/5$$

تست و پاسخ ۳

قسمتی از نمودار تابع $f(x)=3[\frac{x}{2}]$ به صورت شکل داده‌شده است. شیب پاره‌خط AB کدام است؟



۱) ۱ ۲) ۴

۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره رسم تابع براکتی در کنکورهای اخیر فقط در ۱۴۰۰ تجربی آمده است. شیوهٔ بازه‌بندی برای حل این سؤالات را بلد باشید.

خودت حل کنی بهتره برای رسم تابع $y=[bx]$، طول بازه‌ها را $\frac{1}{|b|}$ بگیرید.

نکته برای رسم تابع $y=a[bx]$ از جدول زیر کمک می‌گیریم:

علامت b	طول بازه‌ها	شکل بازه‌ها	بازه‌ها
$b>0$	$\frac{1}{\lvert b\rvert}$	[,)	$\vdots$ $\frac{1}{\lvert b\rvert}\leq x<\frac{2}{\lvert b\rvert}$ $0\leq x<\frac{1}{\lvert b\rvert}$ $-\frac{1}{\lvert b\rvert}\leq x<0$ $\vdots$
$b<0$		(,]	$\vdots$ $\frac{1}{\lvert b\rvert}<x\leq\frac{2}{\lvert b\rvert}$ $0<x\leq\frac{1}{\lvert b\rvert}$ $-\frac{1}{\lvert b\rvert}<x\leq 0$ $\vdots$

پاسخ تشریحی راه اول:

گام اول: با توجه به عبارت $[\frac{x}{2}]$ باید طول بازه‌ها را $\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$ و بازه‌ها را به شکل (,] بگیریم. چون شکل رسم‌شده از ۵ قسمت تشکیل شده که ۳ قسمت در xهای مثبت و ۲ قسمت در xهای منفی است:

$$\overbrace{[-4,\underbrace{-2}_{\text{طول نقطه B}}),[-2,0)}^{\text{۲ قسمت منفی}} \quad , \quad \overbrace{[0,2) \quad , \quad [2,4) \quad , \quad [\underbrace{4}_{\text{طول نقطه A}},6)}^{\text{۳ قسمت مثبت}}$$

گام دوم: برای به دست آوردن مختصات A کافیست $f(4)$ را حساب کنیم:

$$f(x)=3[\frac{x}{2}] \Rightarrow f(4)=3[2]=6 \Rightarrow A=(4,6)$$

گام سوم: برای به دست آوردن مختصات B، باید ضابطهٔ f در دامنهٔ $-4\le x<-2$ را بنویسیم:

$$-4\le x<-2 \xrightarrow{\div 2} -2\le\frac{x}{2}<-1 \xrightarrow{\text{براکت}} [\frac{x}{2}]=-2$$

پس:

$$f(x)=3[\frac{x}{2}]=3(-2)=-6$$

گام چهارم: در نتیجه مختصات نقطهٔ توخالی B به صورت $(-2,-6)$ است.

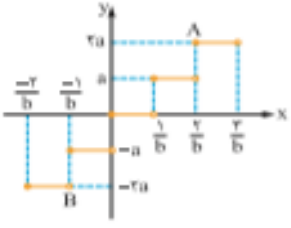
شیب AB برابر است با:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-6-6}{-2-4}=\frac{-12}{-6}=2$$

راه دوم:

مختصات نقاط سر و ته پاره‌خط را پارامتری می‌نویسیم:

با فرض $a,b>0$، نمودار تابع $y=a[bx]$ به شکل مقابل است:



مختصات دو نقطه برحسب a و b به صورت مقابل است:

$$A(\frac{2}{b},2a) \text{ و } B(\frac{-1}{b},-2a)$$

شیب AB برابر است با:

$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{-2a-2a}{\frac{-1}{b}-\frac{2}{b}}=\frac{4a}{\frac{3}{b}} \xrightarrow[b=\frac{1}{2}]{a=3} m_{AB}=\frac{12}{6}=2$$

تست و پاسخ ۴

اگر $[x](11-2[x])\ge 15$، آن‌گاه حاصل $[\frac{x}{2}]$ کدام است؟

۱) ۱ یا ۲ ۲) فقط ۱ ۳) ۲ یا ۳ ۴) فقط ۲

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره شبیه این سؤال را در کنکور تجربی ۱۴۰۱ داشتیم. احتمالاً سؤال این مدلی از این به بعد مُد می‌شود!

خودت حل کنی بهتره $[x]$ را t بگیرید.

نکات ۱) $[u]\in\mathbb{Z}$ ۲) $[u]=k \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} k\le u<k+1$

پاسخ تشریحی نامعادله را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$[x](11-2[x])\ge 15 \Rightarrow 2[x]^2-11[x]+15\le 0$$

با فرض $[x]=t$، داریم:

$$\overbrace{2t^2-11t+15}^{\text{ضرب}}\le 0 \xrightarrow{\text{ضرب a در c}} t^2-11t+30\le 0$$

$$\Rightarrow (t-5)(t-6)\le 0 \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} 5\le t\le 6 \xrightarrow{\text{تقسیم ریشه‌ها بر a}} \frac{5}{2}\le t\le 3$$

با جای‌گذاری $[x]$ به جای t، داریم: $\frac{5}{2}\le[x]\le 3$

چون $[x]\in\mathbb{Z}$، پس:

$$\frac{5}{2}\le[x]\le 3 \xrightarrow{[x]\in\mathbb{Z}} [x]=3 \xrightarrow{\text{نکتهٔ ۲}} 3\le x<4$$

اگر طرفین نامساوی $3\le x<4$ را به ۲ تقسیم کنیم، داریم:

$$1/5\le\frac{x}{2}<2 \Rightarrow [\frac{x}{2}]=1$$

تست و پاسخ ۵

اگر تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax^{۲}+ax+۲x^{۲}-a$ یک‌به‌یک باشد، مقدار $f^{-۱}(a)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره در سؤالات تابع که ضابطه ضرایب مجهول دارد، جملات هم‌درجه را کنار هم بنویسید.

خودت حل کنی بهتره تابع چندجمله‌ای درجه‌زوج نمی‌تواند در $\mathbb{R}$ یک‌به‌یک باشد.

نکات

۱) هر تابع درجه‌زوجی با دامنهٔ $\mathbb{R}$، غیریک‌به‌یک است.

۲) هر تابع خطی به فرم $f(x)=ax+b$ با شرط $a\neq ۰$ یک‌به‌یک است.

۳) برای محاسبهٔ $f^{-۱}(a)$، کافیست معادلهٔ $f(x)=a$ را حل کنیم.

پاسخ تشریحی تابع $f(x)=ax^{۲}+ax+۲x^{۲}-a$ را مرتب می‌کنیم:

$$f(x)=(a+۲)x^{۲}+ax-a$$

طبق نکتهٔ (۱)، باید درجهٔ تابع f فرد باشد، پس ضریب $x^{۲}$ باید صفر باشد:

$$a+۲=۰ \Rightarrow a=-۲$$

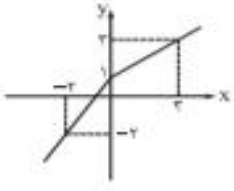
با جای‌گذاری $a=-۲$، ضابطه به صورت $f(x)=-۲x+۲$ درمی‌آید.

برای محاسبهٔ $f^{-۱}(a)$ یا همان $f^{-۱}(-۲)$ باید معادلهٔ $f(x)=-۲$ را حل کنیم:

$$-۲x+۲=-۲ \Rightarrow x=۲$$

پس $f^{-۱}(-۲)=۲$.

تست و پاسخ ۶



شکل داده‌شده نمودار تابع f است. حاصل $(f.f^{-۱})(۲)$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۲/۵

۳) ۳/۵ ۴) ۴/۵

پاسخ: گزینه ۳

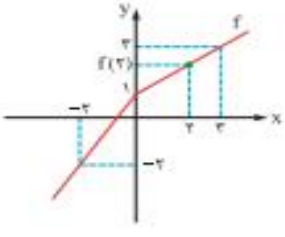
مشاوره رابطهٔ بین نقاط متناظر f و $f^{-۱}$ را یاد باشید. خیلی وقت‌ها برای محاسبهٔ $f^{-۱}(a)$ نیاز به نوشتن ضابطهٔ $f^{-۱}$ نیست.

خودت حل کنی بهتره معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $(۰,۱)$ و $(۳,۳)$ را بنویسید.

نکته ۱) $(f.g)(a)=f(a)g(a)$ ۲) برای محاسبهٔ $f^{-۱}(a)$، کافیست معادلهٔ $f(x)=a$ را حل کنیم.

پاسخ تشریحی برای محاسبهٔ $(f.f^{-۱})(۲)$، باید $f(۲)$ و $f^{-۱}(۲)$ را حساب کنیم.

گام اول: محاسبهٔ $f(۲)$ از روی نمودار: باید دنبال نقطه‌ای به طول $x=۲$ باشیم.



معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ $(۰,۱)$ و $(۳,۳)$ را می‌نویسیم:

$$m=\frac{۳-۱}{۳-۰}=\frac{۲}{۳}$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{شیب}=\frac{۲}{۳}\\ \text{عرض از مبدأ}=۱\end{array}\right\} \Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x+۱$$

در معادلهٔ بالا $x=۲$ را قرار می‌دهیم:

$$f(۲)=\frac{۲}{۳}(۲)+۱=\frac{۷}{۳}$$

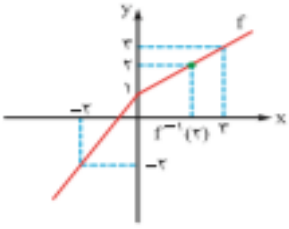
گام دوم، محاسبهٔ $f^{-1}(2)$ از روی نمودار: باید دنبال نقطه‌ای روی f باشیم که عرضش ۲ باشد.

این نقطه روی همان ضابطهٔ قبلی قرار دارد، پس کافیست در آن، جای y عدد ۲ را قرار دهیم x به دست آمده همان $f^{-1}(2)$ است:

$$\frac{2}{3}x+1=2 \Rightarrow x=\frac{3}{2} \Rightarrow f^{-1}(2)=\frac{3}{2}$$

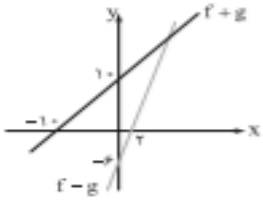
گام سوم، پس:

$$\Rightarrow (f.f^{-1})(2)=f(2).f^{-1}(2)=\frac{7}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{7}{2}=3/5$$



تست و پاسخ ۷

نمودارهای دو تابع $f+g$ و $f-g$ در شکل داده‌شده رسم شده‌اند. مساحت ناحیهٔ محصور بین نمودارهای دو تابع f و g و محور xها کدام است؟



۱) ۱۸ ۲) ۲۰

۳) ۲۴ ۴) ۲۷

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره شبیه این سؤال تا به حال در کنکور نیامده است. پیشنهاد می‌کنیم نوشتن معادلهٔ خط با داشتن طول از مبدأ و عرض از مبدأ را بلد باشید.

خودت حل کنی بهتره اگر $f+g$ و $f-g$ را با هم جمع کنیم به ضابطهٔ $2f$ می‌رسیم و اگر آن را به ۲ تقسیم کنیم به f می‌رسیم.

نکته معادلهٔ خط با طول از مبدأ p و عرض از مبدأ q به صورت $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$ است.

پاسخ تشریحی توابع $f+g$ و $f-g$ هر دو توابعی خطی هستند. معادلهٔ هر دو را می‌نویسیم:

$$\text{معادلهٔ } f+g \xrightarrow[q=10]{p=-10} \frac{x}{-10}+\frac{y}{10}=1 \xrightarrow{\times 10} y=x+10$$

$$\text{معادلهٔ } f-g \xrightarrow[q=-6]{p=2} \frac{x}{2}+\frac{y}{-6}=1 \xrightarrow{\times 6} y=3x-6$$

طرفین دو تساوی بالا را جمع می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} f+g=x+10 \\ f-g=3x-6 \end{array}\right\} \xrightarrow{\oplus} 2f=4x+4 \xrightarrow{\div 2} f=2x+2$$

معادلهٔ خطوط را می‌نویسیم:

با جای‌گذاری $f=2x+2$ در $f+g=x+10$، داریم:

$$2x+2+g=x+10 \Rightarrow g=-x+8$$

نقطهٔ تقاطع توابع f و g را پیدا می‌کنیم:

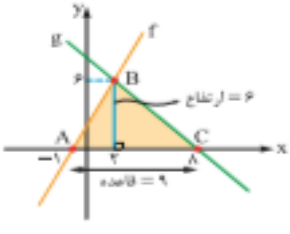
$$f(x)=g(x) \Rightarrow 2x+2=-x+8 \Rightarrow x=2$$

عرض نقطهٔ تقاطع برابر است با:

$$f(2)=2(2)+2=6$$

پس نقطهٔ $(2,6)$ نقطهٔ تقاطع است.

توابع خطی $f(x)=2x+2$ و $g(x)=-x+8$ را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S=\frac{\text{ارتفاع}\times\text{قاعده}}{2}=\frac{9\times 6}{2}=27$$

تست و پاسخ ۸

اگر $f=\{(2,3),(-1,2),(3,-2),(-2,-1)\}$ و $g(x)=\frac{3x}{2-x}$، آن‌گاه تعداد اعضای برد تابع $\frac{f^{-1}+g}{f}$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره سؤال اعمال جبری در کنکور رشتهٔ ریاضی سال‌های اخیر آمده است ولی در رشتهٔ تجربی نه؛ اما ممکن است به زودی در کنکور تجربی هم بیاید.

خودت حل کنی بهتره مقدار تابع $\frac{f^{-1}+g}{f}$ را در اشتراک دامنهٔ توابع f^{-1}، g و f به دست آورید.

پاسخ تشریحی جای مؤلفه‌های اول و دوم f را عوض می‌کنیم تا به f^{-1} برسیم:

$$f=\{(2,3),(-1,2),(3,-2),(-2,-1)\} \Rightarrow f^{-1}=\{(3,2),(2,-1),(-2,3),(-1,-2)\}$$

برای نوشتن تابع $\frac{f^{-1}+g}{f}$ باید بین دامنهٔ توابع f^{-1}، g و f اشتراک بگیریم. چون f صفر نمی‌شود، پس مخرج، شرطی اضافه نمی‌کند.

$$D_{\frac{f^{-1}+g}{f}}=D_{f^{-1}}\cap D_g\cap D_f=\{3,2,-2,-1\}\cap(\mathbb{R}-\{2\})\cap\{2,-1,3,-2\}=\{-1,-2,3\}$$

با توجه به $f^{-1}=\{(3,2),(2,-1),(-2,3),(-1,-2)\}$، $g(x)=\frac{3x}{2-x}$ و $f=\{(2,3),(-1,2),(3,-2),(-2,-1)\}$، مقدار تابع $\frac{f^{-1}+g}{f}$ را به ازای اعضای دامنه‌اش حساب می‌کنیم:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{f^{-1}(-1)+g(-1)}{f(-1)}&=\frac{-2+\frac{3(-1)}{2-(-1)}}{2}=\frac{-2-1}{2}=\frac{-3}{2}\\
\frac{f^{-1}(-2)+g(-2)}{f(-2)}&=\frac{3+\frac{3(-2)}{2-(-2)}}{-1}=\frac{3-\frac{3}{2}}{-1}=\frac{-3}{2}\\
\frac{f^{-1}(3)+g(3)}{f(3)}&=\frac{2+\frac{3(3)}{2-3}}{-2}=\frac{2-9}{-2}=\frac{7}{2}
\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{برد}}\{\frac{-3}{2},\frac{7}{2}\}$$

پس بردمان ۲ عضو دارد.

تست و پاسخ ۹

اگر $f(x)=2\cos^2 x$ و $g(x)=\cos(x-\frac{\pi}{2})+1$، آن‌گاه برد تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟

۱) $[0,4)$ ۲) $[0,4]$ ۳) $(-2,2]$ ۴) $[-2,2]$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره در تابع به فرم $\frac{AB}{AC}$، بعد از ساده‌کردن A از صورت و مخرج، مراقب اتفاقاتی که برای دامنه و در نتیجه برای برد می‌افتد باشید.

خودت حل کنی بهتره جای $\cos^2 x$ بنویسید $1-\sin^2 x$. صورت و مخرج به کمک اتحاد مزدوج ساده می‌شوند!

نکته در حل این سؤال از اتحادهای مثلثاتی زیر استفاده می‌کنیم:

$$\cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha \qquad \cos(-\alpha)=\cos\alpha \qquad \cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$$

پاسخ تشریحی ضابطهٔ g را ساده می‌کنیم:

$$g(x)=\underbrace{\cos(x-\frac{\pi}{2})}_{\cos(\frac{\pi}{2}-x)}+1 \Rightarrow g(x)=\sin x+1$$

ضابطهٔ $\frac{f}{g}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{2\cos^2 x}{\sin x+1}=\frac{2(1-\sin^2 x)}{1+\sin x}=\frac{2(1-\sin x)\cancel{(1+\sin x)}}{\underbrace{\cancel{1+\sin x}}_{\text{(باید حواسمان به شرط } \sin x\neq -1 \text{ باشد)}}}=2(1-\sin x)$$

با شرط $\sin x\neq -1$، بردمان را حساب می‌کنیم.

چرا مساوی نذاشتیم؟

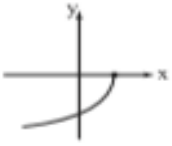
با استفاده از نامساوی $-1 \le \sin x \le 1$ داریم: $-1<\sin x\le 1 \xrightarrow{\text{قرینه}} -1\le -\sin x<1 \xrightarrow{+1} 0\le 1-\sin x<2 \xrightarrow{\times 2} 0\le \underbrace{2(1-\sin x)}_{\frac{f}{g}}<4$

پس برد $\frac{f}{g}$ بازهٔ $[0,4)$ است.

دام تستی اگر بعد از ساده‌کردن صورت و مخرج، شرط $\sin x \neq -1$ را لحاظ نمی‌کردید، بردتان بازهٔ $[0,4]$ درمی‌آمد!

تست و پاسخ ۱۰

نمودار تابع $y=a\sqrt{b-x}$ به صورت شکل داده‌شده است. نمودار تابع $y=b\sqrt{a+x}$ شبیه کدام گزینه است؟



۱)

۲)

۳)

۴)

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره قیافهٔ کلی و مختصات نقطهٔ شروع توابع رادیکالی به فرم $y=a\sqrt{bx+c}+d$ را بلد باشید.

خودت حل کنی بهتره در نمودار توابع به فرم $y=a\sqrt{bx+c}+d$، نقطهٔ شروع نمودار، نقطهٔ $(\frac{-c}{b}, d)$ می‌باشد.

ریشهٔ داخل رادیکال — عدد بیرونی

نکته نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=a\sqrt{bx+c}+d$ به یکی از ۴ شکل روبه‌رو است:

	علامت a	علامت b	شکل نمودار	مختصات نقطهٔ شروع (S)
۱	+	+		$(\frac{-c}{b}, d)$
۲	+	−		
۳	−	+		
۴	−	−		

ریشهٔ داخل رادیکال — عدد بیرونی

پاسخ تشریحی گام اول: از ضابطهٔ $y=a\sqrt{-x+b}$ و با توجه به نمودار دو مورد زیر را نتیجه می‌گیریم:

۱) ریشهٔ داخل رادیکال $x=b$ و عددی بیرونی صفر است، پس مختصات نقطهٔ شروع $S(b,0)$ است که با توجه به نمودار $b>0$ می‌باشد. ۲) چون شکل نمودار شبیه حالت ۴ جدول است، پس ضریب پشت رادیکال منفی است: $a<0$

گام دوم، برای تابع $y=b\sqrt{x+a}$، با توجه به $a<0$ و $b>0$ داریم:

۱) ریشهٔ داخل رادیکال $x=\underbrace{-a}_{\text{مثبت}}$ و عدد بیرونی صفر است، پس مختصات نقطهٔ شروع $S(\overbrace{-a}^{\text{مثبت}},0)$ است که در سمت راست محور xها قرار دارد.

۲) چون ضریب پشت رادیکال و ضریب x داخل آن هر دو مثبت‌اند، پس شکل تابع شبیه حالت ۱ جدول است.

در نتیجه نمودار به شکل مقابل است:

تست و پاسخ ۱۱

شکل داده‌شده نمودار تابع $y=1-\frac{1}{2}f(x+1)$ را نشان می‌دهد. مساحت ناحیهٔ محصور به نمودار تابع $y=f(x)$ و محور xها کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۱۰

۳) ۲/۵ ۴) ۱/۲۵

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره بعضی از سؤالات تبدیل نمودارها را با عددگذاری می‌توانیم حل کنیم، ولی سؤالاتی که سطح محصور می‌خواهد راه فرار ندارند! پس باید تبدیل نمودار را به صورت کامل بلد باشید.

خودت حل کنی بهتره برای تبدیل $y=af(bx+c)+d$ به $y=f(x)$، ترتیب حذف ضرایب به صورت روبه‌رو است: $\underset{1}{d},\underset{2}{a},\underset{3}{b},\underset{4}{c}$

نکات

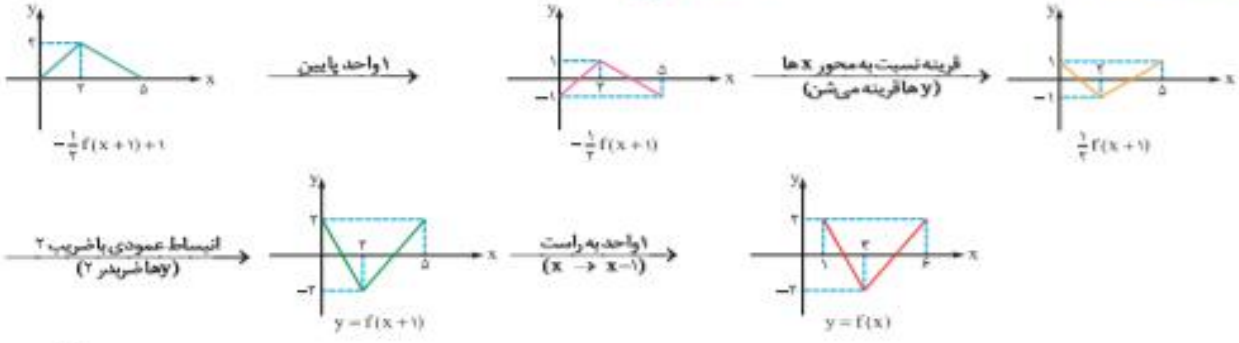
۱) برای تبدیل نمودار تابع $y=f(x)$ به $y=af(bx+c)+d$ ترتیب مراحل به صورت زیر است:

$$\overset{\text{سوم}}{a}f(\overset{\text{دوم}}{b}x+\overset{\text{اول}}{c})+\overset{\text{چهارم}}{d}$$

انبساط یا انقباض عمودی — انبساط یا انقباض افقی — انتقال افقی — انتقال عمودی

۲) برای تبدیل تابع $y=af(bx+c)+d$ به $y=f(x)$، ترتیبِ مراحل، برعکس بالا است.

پاسخ تشریحی مرحله‌به‌مرحله از روی نمودار $y=-\frac{1}{2}f(1x+1)+1$ (دوم، سوم، چهارم، اول) به نمودار $y=f(x)$ می‌رسیم.

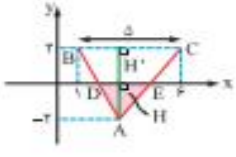


برای به دست آوردن قاعدهٔ مثلث رنگی از تالس استفاده می‌کنیم:

$$\frac{AH}{AH'}=\frac{DE}{BC}\Rightarrow\frac{2}{4}=\frac{DE}{5}\Rightarrow DE=2/5$$

پس:

$$S_{ADE}=\frac{AH\times DE}{2}=\frac{2\times 2/5}{2}=2/5$$



تست و پاسخ ۱۲

خط $y=k$، نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-x-2}$ را قطع نمی‌کند. مجموع مقادیر قابل قبول برای x از معادلهٔ $f(kx)=0$ کدام است؟

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره در تابع به فرم $\frac{A.B}{A.C}$، بعد از ساده‌کردن A از صورت مخرج، مراقب اتفاقاتی که برای دامنه و در نتیجه برای برد می‌افتد باشید.

خودت حل کنی بهتره صورت و مخرج f را تجزیه کنید.

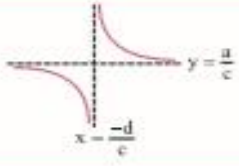
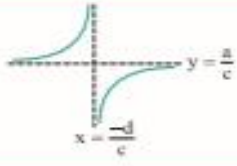
درس‌نامه برای رسم تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ مراحل زیر را می‌رویم:

۱) خط‌های $x=\frac{-d}{c}$ و $y=\frac{a}{c}$ را به صورت خط‌چین در دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.

$\frac{a}{c}$: نسبت ضریب x صورت به مخرج

$\frac{-d}{c}$: ریشهٔ مخرج

۲) $ad-bc$ را تشکیل می‌دهیم. بسته به علامتش، قیافهٔ تابع یکی از این دو حالت است.

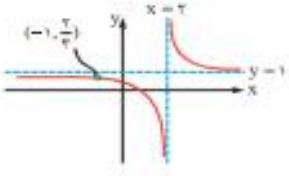
$ad-bc<0$	$ad-bc>0$
	

پاسخ تشریحی گام اول، صورت و مخرج تابع f را به ترتیب با اتحادهای مزدوج و جمله‌مشترک تجزیه و سپس ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-x-2}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-2)(x+1)}\xrightarrow{\text{باشرط } x\neq -1} f(x)=\frac{x-1}{x-2}$$

گام دوم، تابع هموگرافیک $f(x)=\frac{x-1}{x-2}$ را رسم می‌کنیم. خط‌های به معادلهٔ $x=2$ و $y=1$ را به صورت خط‌چین رسم می‌کنیم.

$ad-bc$ را حساب می‌کنیم: $1(-2)-(-1)(1)=-1$



چون منفی شد، نمودار شبیه شکل سمت چپ جدول بالا است:

مقدار تابع $f(x)=\frac{x-1}{x-2}$ به ازای $x=-1$، می‌شود $y=\frac{2}{3}$. چون شرط $x\neq -1$ داشتیم، پس نقطهٔ $(-1,\frac{2}{3})$ باید روی نمودار توخالی باشد.

گام سوم، با توجه به نمودار نتیجه می‌گیریم، دو خط افقی $y=1$ و $y=\frac{2}{3}$ نمودار f را قطع نمی‌کنند، پس $k=1$ یا $k=\frac{2}{3}$.

گام چهارم، حالا معادلهٔ $f(kx)=0$ را تشکیل می‌دهیم. دقت کنید وقتی کسر $\frac{A}{B}$ صفر می‌شود که $A=0$ باشد.

$$f(kx)=0\xrightarrow{k=1} f(x)=0\Rightarrow \frac{x-1}{x-2}=0\Rightarrow x-1=0\Rightarrow x=1$$

$$f(kx)=0\xrightarrow{k=\frac{2}{3}} f(\tfrac{2}{3}x)=0\Rightarrow \frac{\frac{2}{3}x-1}{\frac{2}{3}x-2}=0\Rightarrow \frac{2}{3}x-1=0\Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

مجموع جواب‌ها برابر است با: $1+\frac{3}{2}=2/5$

تست و پاسخ ۱۳

اگر $f(x)=\frac{x-1}{2}$. آن‌گاه وارون تابع $g(x)=ax+f^{-1}(2x)$ بر خودش منطبق است. مقدار $g(a)$ کدام است؟

۱) -5 ۲) 6 ۳) -6 ۴) 5

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره توابع خطی که وارونشان با خودشان یکسان است را بشناسید.

خودت حل کنی بهتره برای تشکیل $f^{-1}(2x)$ باید اول $f^{-1}(x)$ را داشته باشیم و بعد جای xهایش $2x$ قرار دهیم.

نکات ۱) وارون تابع خطی $y=ax+b$ به صورت $y=\frac{1}{a}x-\frac{b}{a}$ است.

۲) دو جور تابع خطی داریم که با وارونشان برابرند: الف) نیمساز ناحیهٔ اول و سوم که ضابطه‌اش $y=x$ است.

ب) هر خط با شیب -1 (و عرض از مبدأ دلخواه) که ضابطه‌اش به صورت $y=-x+h$ است.

پاسخ تشریحی گام اول: با توجه به نکتهٔ صفحهٔ قبل، ضابطهٔ وارون تابع خطی f را می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\xrightarrow[b=-\frac{1}{2}]{a=\frac{1}{2}}f^{-1}(x)=\frac{1}{\frac{1}{2}}x-\frac{\frac{-1}{2}}{\frac{1}{2}}=2x+1$$

گام دوم: در ضابطهٔ $f^{-1}(x)=2x+1$، جای xها، $2x$ قرار می‌دهیم:

$$f^{-1}(2x)=2(2x)+1=4x+1$$

ضابطهٔ g را تشکیل می‌دهیم:

$$g(x)=ax+\underbrace{f^{-1}(2x)}_{4x+1}\Rightarrow g(x)=(a+4)x+1$$

گام سوم: چون g تابع همانی نیست، پس برای آن‌که g با g^{-1} برابر شود باید شیبش -1 باشد:

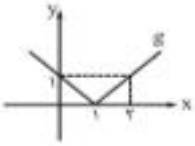
$$a+4=-1\Rightarrow a=-5$$

در نتیجه:

$$g(x)=-x+1\Rightarrow g(a)=g(-5)=5+1=6$$

تست و پاسخ ۱۴

اگر $f(x)=\begin{cases} x+3 & x\geq -1 \\ x-3 & x<-1 \end{cases}$ و نمودار تابع g مطابق شکل داده‌شده باشد، حاصل $g(f(0))$ کدام است؟



۱) -2 ۲) ۲

۳) -3 ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره این سؤال بیشتر حالت دست‌گرمی دارد. برای حل این سؤال باید محاسبهٔ $f(g(a))$ و نوشتن معادلهٔ خط را بلد باشید.

خودت حل‌کنی بهتره فرض کنید $f(0)$ بشود k. برای محاسبهٔ $g(k)$ با توجه به این‌که $k\geq 1$ یا $k<1$ است، باید یکی از ضابطه‌های g را بنویسید.

نکته معادلهٔ خط با شیب m و گذرنده از نقطهٔ (x_0,y_0) به شکل روبه‌رو است: $y-y_0=m(x-x_0)$

پاسخ تشریحی برای محاسبهٔ $g(f(0))$ دو گام داریم:

$$\overbrace{g(\underbrace{f(0)}_{\text{گام ۱}})}^{\text{گام ۲}}$$

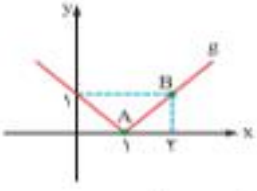
گام اول، با توجه به $f(x)=\begin{cases} x+3 & x\geq -1 \\ x-3 & x<-1 \end{cases}$، برای محاسبهٔ $f(0)$ از ضابطهٔ بالایی استفاده می‌کنیم:

$$x\geq -1: f(x)=x+3 \Rightarrow f(0)=3$$

گام دوم، $g(\underbrace{f(0)}_{3})$ تبدیل به $g(3)$ می‌شود.

برای محاسبهٔ $g(3)$ باید ضابطهٔ نیم‌خط سمت راست را پیدا کنیم.

به کمک دو نقطهٔ $A(1,0)$ و $B(2,1)$، معادله را می‌نویسیم:



$$m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{1-0}{2-1}=1$$

$$y-y_A=m(x-x_A) \Rightarrow y-0=1(x-1) \Rightarrow y=x-1 \xrightarrow{\text{به ازای } x\geq 1} g(x)=x-1$$

در نتیجه:

$$g(3)=3-1=2$$

تذکر البته اگر کمی تیزتر باشیم از روی نمودار g می‌فهمیم که ضابطه‌اش $g(x)=|x-1|$ است و درگیر نوشتن معادلهٔ خط برای g نمی‌شویم.

تست و پاسخ ۱۵

اگر $f(\frac{1+2x^2}{2x})=4x^2+\frac{1}{x^2}$. آن‌گاه $f(1/5)$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره این تیپ از سؤالات تابع، نیاز به مهارت و بلدبودن اتحادها و حل معادله دارد. در تساوی‌های به فرم $f(\square)=\bigcirc$، اگر $\square$ عبارت شلوغی بود، نترسید! قطعاً حل جمع‌وجوری دارد!

خودت حل‌کنی بهتره باید دنبال xی باشید که به ازای آن، عبارت داخل پرانتز ۱/۵ شود.

درس‌نامه اگر سؤال به ما تساوی به فرم $f(\square)=\bigcirc$ را داده باشد و مقدار $f(k)$ را بخواهد، دوتا کار می‌توانیم انجام دهیم:

۱) $\square$ را مساوی t قرار می‌دهیم و سعی می‌کنیم $\bigcirc$ را برحسب t بنویسیم.

۲) ابتدا معادلهٔ $\square=k$ را حل می‌کنیم، بعد x به دست آمده را در رابطهٔ اولیه جای‌گذاری می‌کنیم.

نکته دو حالت پرکاربرد معادلهٔ درجه ۲:

رابطهٔ بین ضرایب	ریشه‌ها	مثال
$a+b+c=0$	$1, \frac{c}{a}$	$3x^2-8x+5=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\frac{5}{3} \end{cases}$
$a+c=b$	$-1, \frac{-c}{a}$	$5x^2-7x-12=0 \Rightarrow \begin{cases} x_1=-1 \\ x_2=\frac{12}{5} \end{cases}$

پاسخ تشریحی سؤال به ما تساوی $f(\frac{1+2x^2}{2x})=4x^2+\frac{1}{x^2}$ را داده است. عبارت داخل پرانتز را مساوی ۱/۵ قرار می‌دهیم و x را به دست می‌آوریم:

$$\frac{1+2x^2}{\cancel{2}x}=\frac{3}{\cancel{2}} \Rightarrow 2x^2+1=3x \Rightarrow 2x^2-3x+1=0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=\frac{c}{a}=\frac{1}{2} \end{cases}$$

در تساوی $f(\frac{1+2x^2}{2x})=4x^2+\frac{1}{x^2}$، یک بار $x_1=1$ و یک بار $x_2=\frac{1}{2}$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} x_1=1 \Rightarrow f(\frac{3}{2})=4+1=5 \\ x_2=\frac{1}{2} \Rightarrow f(\frac{3}{2})=4(\frac{1}{4})+\frac{1}{\frac{1}{4}}=1+4=5 \end{array}\right\} \Rightarrow f(\frac{3}{2})=5$$

تست و پاسخ ۱۶

با دامنهٔ A، برد تابع $f(x)=1-3x$ به صورت $(-2,4]$ است. با همین دامنه، برد تابع $g(x)=|x-\frac{1}{2}|-1$ کدام است؟

۱) $[-1,\frac{-1}{2}]$

۲) $(\frac{-1}{2},\frac{1}{2}]$

۳) $[-1,\frac{1}{2})$

۴) $[-1,\frac{1}{2}]$

پاسخ: گزینه ۴

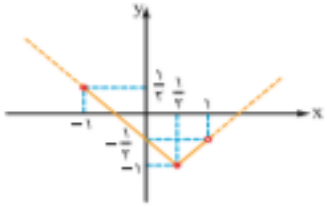
مشاوره فقط در توابع پیوسته و یکنوا، برای محاسبهٔ برد می‌توانیم سروته بازهٔ دامنه را به تابع بدهیم تا سروته بازهٔ برد را به ما بدهد!

خودت حل کنی بهتره اول دامنهٔ f را حساب کنید و بعد نمودار g را در آن دامنه رسم کنید.

پاسخ تشریحی برد تابع خطی $f(x)=-3x+1$، بازهٔ $(-2,4]$ است. با قراردادن ضابطهٔ تابع بین ۲- و ۴، محدودهٔ x را پیدا می‌کنیم:

$$-2<f(x)\le 4 \Rightarrow -2<-3x+1\le 4 \xrightarrow{-1} -3<-3x\le 3 \xrightarrow[\text{جهت عوض می‌شه}]{\times(\frac{-1}{3})} 1>x\ge -1 \xrightarrow{\text{دامنه}} A=[-1,1)$$

نمودار تابع $g(x)=|x-\frac{1}{2}|-1$ با دامنهٔ $[-1,1)$ را رسم می‌کنیم:

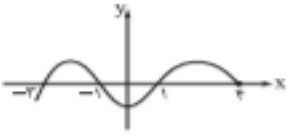


	ابتدا	ریشه	انتها
x	-1	$\frac{1}{2}$	1
y	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{-1}{2}$

با توجه به نمودار g، بردمان بازهٔ $[-1,\frac{1}{2}]$ است.

تست و پاسخ ۱۷

شکل داده‌شده نمودار تابع $y=f(x+1)$ است. تابع $y=\sqrt{(x-2)f(x)}$ در کدام بازهٔ زیر تعریف شده است؟



۱) $[-2,0]$ ۲) $[-3,-1]$

۳) $[-1,1]$ ۴) $[0,4]$

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره شبیه این سؤال تا الان سه بار در کنکورهای ریاضی و تجربی آمده است. روش تعیین علامت از روی نمودار را بلد باشید.

خودت حل کنی بهتره اول نمودار $f(x)$ را بکشید. بعد زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهید.

پاسخ تشریحی گام اول، اگر نمودار تابع $f(x)$ را یک واحد به چپ ببریم، به تابع $f(x+1)$ می‌رسیم؛ پس الان باید $f(x+1)$ را یک واحد به راست ببریم تا به خود $f(x)$ برسیم:

گام دوم، برای به دست آوردن دامنهٔ تابع $y=\sqrt{(x-2)f(x)}$، باید زیر رادیکال را بزرگ‌تر یا مساوی صفر قرار دهیم: $(x-2)f(x)\geq 0$

گام سوم، ریشه‌های عبارت $(x-2)f(x)$ را به کمک نمودار f پیدا می‌کنیم و آن را تعیین علامت می‌کنیم:

$$(x-2)\underbrace{f(x)}_{\text{ریشه: } -2,0,2,5}$$

ریشه: ۲

برای تعیین علامت f، جاهایی که نمودار f بالای محور xهاست، علامت $+$ و جاهایی که زیر محور xهاست، علامت $-$ قرار می‌دهیم.

جدول تعیین علامت رسم می‌کنیم:

		-2		0		2		5	
$x-2$	$-$		$-$		$-$		$+$		$+$
$f(x)$	$-$		$+$		$-$		$+$		
$(x-2)f(x)$	$+$		$-$		$+$		$+$		

جواب جواب

گام چهارم، ما دنبال قسمت مثبت یا صفر از جدول تعیین علامت هستیم: $D_f=(-\infty,-2]\cup[0,5]$

در بین گزینه‌ها، فقط بازهٔ $[0,4]$ زیرمجموعهٔ D_f است.

تست و پاسخ ۱۸

دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=\dfrac{x^4-a^2x^2+2x^2+1}{x^2+ax+1}$ و $g(x)=x^2-ax+1$، به ازای کدام مقدار a با هم مساوی نیستند؟

۱) $1-\sqrt{2}$ ۲) $1+\sqrt{2}$ ۳) $1+\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۴) $1-\frac{\sqrt{2}}{2}$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره در سؤالات تساوی توابع، اول دامنه‌ها را مقایسه کنید، بعد اگر لازم شد سراغ مقایسهٔ ضابطه‌ها هم بروید.

خودت حل کنی بهتره برای آن‌که دامنهٔ f، $\mathbb{R}$ باشد باید دلتای مخرجش منفی باشد.

نکته توابع f و g با هم برابرند، اگر هر دو شرط زیر را داشته باشند:

۱) دامنه‌هایشان برابر باشد.

۲) ضابطه‌هایشان قابل تبدیل به هم باشد (یعنی بتوانیم قیافهٔ یکی را بعد از یک‌سری عمل جبری و ... مثل دیگری بنویسیم).

تذکر در محاسبات هر جایی که نیاز بود! می‌توانید به صورت تقریبی، $\sqrt{2}$ را برابر با ۱/۴ و $\sqrt{3}$ را برابر ۱/۷ در نظر بگیرید.

پاسخ تشریحی گام اول، دامنهٔ تابع $g(x)=x^2-ax+1$ که $\mathbb{R}$ است. برای آن‌که دامنهٔ $f(x)=\dfrac{x^4+(2-a^2)x^2+1}{x^2+ax+1}$ هم $\mathbb{R}$ باشد، باید مخرجش ریشه نداشته باشد. از آن‌جایی که مخرج، یک عبارت درجه‌دوم است، برای آن‌که ریشه نداشته باشد باید دلتایش منفی باشد:

$$\Delta_{\text{مخرج}}<0 \Rightarrow a^2-4<0 \Rightarrow a^2<4 \Rightarrow |a|<2 \Rightarrow -2<a<2$$

در بین گزینه‌ها فقط $\underbrace{1+\sqrt{2}}_{\text{تقریباً می‌شه ۲/۴}}$ در محدودهٔ $(-2,2)$ نیست، پس قطعاً جواب، همین گزینه است، ولی ما ادامه می‌دهیم تا به جواب کامل برسیم.

گام دوم، ضابطه‌ها را برابر قرار می‌دهیم:

$$f(x)=g(x) \Rightarrow \frac{x^4+(2-a^2)x^2+1}{x^2+ax+1}=x^2-ax+1 \Rightarrow x^4+(2-a^2)x^2+1=\underbrace{(x^2+1+ax)(x^2+1-ax)}_{\text{اتحاد مزدوج}}$$

$$\Rightarrow x^4+(2-a^2)x^2+1=(x^2+1)^2-(ax)^2 \Rightarrow \underbrace{x^4+(2-a^2)x^2+1=x^4+2x^2+1-a^2x^2}_{\text{همشون با هم ساده می‌شن!}} \Rightarrow \underbrace{0=0}_{\substack{\text{تساوی}\\ \text{همواره درست}}}$$

چون در آخر به یک تساوی همواره درست رسیدیم، پس به ازای هر مقدار a که در بازهٔ $(-2,2)$ باشد، دو تابع با هم مساوی هستند.

تست و پاسخ ۱۹

اگر $f(x)=\dfrac{x-2}{x+1}$ و $g(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$، آن‌گاه برد تابع f.g به صورت $\mathbb{R}-A$ است. مجموع اعضای مجموعهٔ A کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲/۵

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره در تابع به فرم $\dfrac{A.B}{A.C}$، بعد از ساده‌کردن A از صورت و مخرج، مراقب اتفاقاتی که برای دامنه و در نتیجه برای برد می‌افتد باشید.

خودت حل کنی بهتره اگر f تابعی یک‌به‌یک باشد و عدد a را از دامنه‌اش حذف کنیم، باید $f(a)$ را هم از بردش حذف کنیم.

نکته برد تابع هموگرافیک $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ به صورت $\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$ است.

نکته اگر از تابع یک‌به‌یک f، عدد a را از دامنه حذف کنیم، عدد $f(a)$ هم از برد حذف می‌شود.

پاسخ تشریحی گام اول، تابع fg را تشکیل می‌دهیم:

$$(f.g)(x)=f(x)\,g(x)=\frac{x-2}{\underbrace{\cancel{x+1}}_{\text{شرط: } x\neq -1}}\times\frac{\cancel{x+1}}{x-1}=\frac{x-2}{x-1}$$

گام دوم، برای برد تابع هموگرافیک $y=\dfrac{x-2}{x-1}$، دوتا شرط داریم:

۱) برد شامل $\frac{a}{c}=\frac{1}{1}=1$ نمی‌شود.

۲) از آن‌جایی که تابع هموگرافیک یک‌به‌یک است و موقع ساده‌کردن، شرط $x\neq -1$ را گذاشتیم، پس مقدار تابع به ازای $x=-1$ در برد نیست:

$$y=\frac{x-2}{x-1}\xrightarrow{x=-1} y=\frac{-3}{-2}=1/5$$

گام سوم، برد f.g به صورت $\mathbb{R}-\{1,1/5\}$ است؛ در نتیجه مجموع اعضای مجموعهٔ A برابر است با: $1+1/5=2/5$

تست و پاسخ ۲۰

اگر $f(x)=|x|-1$ و $g(x)=\begin{cases} x+1 & x\le 1 \\ \frac{1-x^2}{x} & x>1 \end{cases}$ باشد، کدام گزینه در مورد نمودار تابع $f+g$ درست است؟

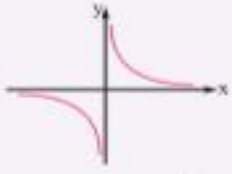
۱) از هر چهار ناحیهٔ مختصات می‌گذرد.
۲) از ناحیهٔ دوم و سوم مختصات نمی‌گذرد.
۳) خط $y=-2$ را قطع می‌کند.
۴) خط $y=2$ را قطع نمی‌کند.

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره: روی رسم نمودار سرمایه‌گذاری کنید!

خودت حل کنی بهتره: ضابطهٔ تابع $f+g$ را در سه دامنهٔ $x<0$، $0\le x\le 1$ و $x>1$ بنویسید.

نکته: نمودار تابع هموگرافیک $y=\frac{1}{x}$ به شکل مقابل است:



پاسخ تشریحی: گام اول، تابع f را به صورت دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

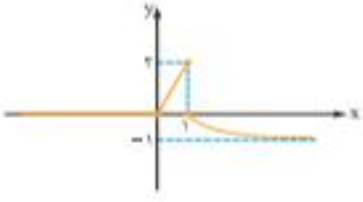
$$f(x)=|x|-1=\begin{cases} x-1 & x\ge 0 \\ -x-1 & x<0 \end{cases}$$

گام دوم، تابع f در $x=0$ و تابع g در $x=1$ تغییر ضابطه می‌دهند، پس تابع $f+g$ را در سه محدودهٔ $x>1$، $0\le x\le 1$ و $x<0$ می‌نویسیم:

	$x<0$	$0\le x\le 1$	$x>1$
f	$-x-1$	$x-1$	$x-1$
g	$x+1$	$x+1$	$\frac{1-x^2}{x}=\frac{1}{x}-x$
$f+g$	0	$2x$	$\frac{1}{x}-1$

$$\Rightarrow (f+g)(x)=\begin{cases} 0 & x<0 \\ 2x & 0\le x\le 1 \\ \frac{1}{x}-1 & x>1 \end{cases}$$

گام سوم، نمودار $f+g$ را رسم می‌کنیم:



نمودار از ناحیهٔ دوم و سوم نمی‌گذرد، پس ۲ صحیح است.

تست و پاسخ ۲۱

اگر $f(x)=x^5-x^2$ و $g(x)=x|x|$، آن‌گاه برد تابع $\frac{f}{g}$ کدام است؟

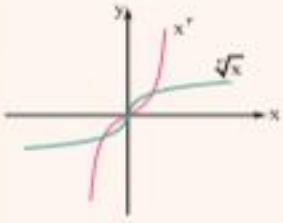
۱) $\mathbb{R}-\{\pm 1\}$
۲) $(-1,+\infty)-\{1\}$
۳) $\mathbb{R}-[-1,1]$
۴) $(-1,+\infty)$

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره: کتاب درسی از شما توقع دارد نمودار توابع درجه‌سه به فرم $y=a(x-\alpha)^3+\beta$ را بلد باشید. حالا ممکن است قدرمطلق را هم وارد بازی کنند.

خودت حل کنی بهتره: ضابطهٔ $\frac{f}{g}$ را به ازای $x>0$ و $x<0$ تشکیل دهید و نمودارش را رسم کنید.

درس‌نامه ◄◄ نمودار تابع $y=x^3$ ملقب به لُر و وارونش $y=\sqrt[3]{x}$ به شکل مقابل هستند:



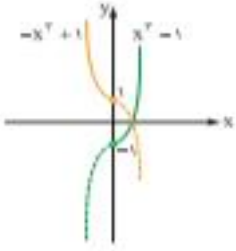
پاسخ تشریحی تابع $\frac{f}{g}$ را تشکیل می‌دهیم:

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^5-x^3}{x|x|}\xrightarrow[x\neq 0]{\text{به x ساده می‌کنیم}}=\frac{x^4-x}{|x|}$$

با توجه به ریشهٔ قدرمطلق که $x=0$ است، تابع را دوضابطه‌ای می‌نویسیم. دقت کنید $x=0$ ریشهٔ مخرج است و در دامنه نیست:

$$(\frac{f}{g})(x)=\begin{cases}\frac{x^4-x}{x} & x>0\\ \frac{x^4-x}{-x} & x<0\end{cases}=\begin{cases}x^3-1 & x>0\\ -x^3+1 & x<0\end{cases}$$

باید دو تابع $y=x^3-1$ با دامنهٔ $x>0$ و $y=-x^3+1$ با دامنهٔ $x<0$ را در یک دستگاه رسم کنیم:



با توجه به نمودار رسم‌شده برد $\frac{f}{g}$، بازهٔ $(-1,+\infty)$ است.

تست و پاسخ ۲۲

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x(3+(3+x)x)$ از کدام ناحیهٔ دستگاه مختصات نمی‌گذرد؟

۱) اول و سوم

۲) دوم و چهارم

۳) فقط دوم

۴) فقط چهارم

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره کتاب درسی از شما توقع دارد نمودار توابع درجه‌سه به فرم $y=a(x-\alpha)^3+\beta$ را بلد باشید.

خودت حل‌کنی بهتره ضابطه را ساده کنید و بعد ۱+ و ۱− را به انتهای آن اضافه کنید.

درس‌نامه ◄◄ در تابع درجه‌سوم $y=a(x-\alpha)^3+\beta$، نقطهٔ (α,β) مرکز تقارن تابع است و با توجه به علامت a، نمودار به صورت یکی از دو شکل زیر است:

$a>0$	$a<0$
اکیداً صعودی	اکیداً نزولی

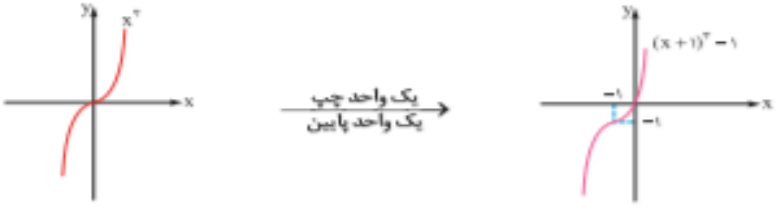
نکته اتحادهای مکعب معروف که در این قسمت زیاد استفاده می‌شوند، این‌ها هستند:

اتحاد	جملات مهم اتحاد	مثال
$(x\pm 1)^3 = x^3 \pm 3x^2 + 3x \pm 1$	$x^3 \pm 3x^2 + 3x$	$x^3+3x^2+3x+8 \xrightarrow[\text{کردن ۱}]{\text{اضافه‌وکم}} \underbrace{x^3+3x^2+3x+1}-1+8$ $=(x+1)^3+7$
$(x\pm 2)^3 = x^3 \pm 6x^2 + 12x \pm 8$	$x^3 \pm 6x^2 + 12x$	$x^3-6x^2+12x+6 \xrightarrow[\text{کردن ۸}]{\text{اضافه‌وکم}} \underbrace{x^3-6x^2+12x-8}+8+6$ $=(x-2)^3+14$

پاسخ تشریحی ابتدا ضابطهٔ تابع را ساده می‌کنیم: $f(x)=x(3+(3+x)x)=x(3+3x+x^2)=x^3+3x^2+3x$

اگر به ضابطهٔ بالا ۱+ و ۱− اضافه کنیم، می‌توانیم آن را به شکل بهتری بنویسیم: $f(x)=\underbrace{x^3+3x^2+3x+1}_{(x+1)^3}-1=(x+1)^3-1$

برای رسم $f(x)=(x+1)^3-1$. کافی است نمودار $y=x^3$ را یک واحد به چپ و یک واحد به پایین ببریم:



پس نمودار f از ناحیهٔ ۲ و ۴ عبور نمی‌کند.

تست و پاسخ ۲۳

نمودار تابع $f(x)=(x-1)^3+g(x)$ که در آن $g(x)$، یک تابع درجه‌دوم می‌باشد مطابق شکل داده‌شده است. حاصل $g(-1)$ کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱

۳) ۱۲ ۴) ۱۳

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره تابع f همان $y=x^3$ است که ۲ واحد به چپ و ۳ واحد به بالا رفته است.

نکته در تابع درجه‌سوم $y=k(x-\alpha)^3+\beta$، نقطهٔ (α,β) مرکز تقارن تابع است و با توجه به علامت k نمودار به صورت یکی از دو شکل زیر است:

$k>0$	$k<0$

پاسخ تشریحی گام اول: از تساوی $f(x)=(x-1)^3+\underbrace{g(x)}_{\text{درجه ۲}}$، نتیجه می‌گیریم f تابعی درجه ۳ است که ضریب x^3 در آن یک می‌باشد.

بازشدهٔ آن هم به شکل روبه‌رو است: $f(x)=x^3-3x^2+3x-1+ax^2+bx+c=x^3+(-3+a)x^2+(3+b)x+(c-1)$

ضریب x^3، عدد ۱ است (پس در گام بعد k را ۱ می‌گیریم).

گام دوم، از نمودار رسم‌شده نتیجه می‌گیریم که مرکز تقارن تابع درجه‌سوم f، نقطهٔ $(\underset{\alpha}{-۲},\underset{\beta}{۳})$ است، پس ضابطه‌اش به صورت زیر است:

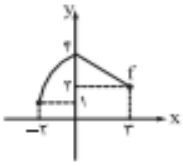
$$f(x)=k(x-\alpha)^۳+\beta \xrightarrow[k=۱]{\alpha=-۲,\beta=۳} f(x)=(x+۲)^۳+۳=x^۳+۶x^۲+۱۲x+۱۱$$

گام سوم، ضابطه‌های به دست آمده از گام اول و دوم را برابر قرار می‌دهیم:

$$x^۳+(-۳+a)x^۲+(۳+b)x+(c-۱)=x^۳+۶x^۲+۱۲x+۱۱ \Rightarrow \begin{cases}-۳+a=۶ \Rightarrow a=۹\\ ۳+b=۱۲ \Rightarrow b=۹\\ c-۱=۱۱ \Rightarrow c=۱۲\end{cases}$$

گام چهارم، پس ضابطهٔ g به صورت $g(x)=۹x^۲+۹x+۱۲$ است و داریم: $g(-۱)=۹-۹+۱۲=۱۲$

تست و پاسخ ۲۴



شکل داده‌شده نمودار تابع f است. در دامنه و برد تابع $y=۲f(۱+\frac{x}{۲})-۱$ چند عدد صحیح مشترک‌اند؟

۱) هیچ ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره در سؤالات تبدیل توابع که دامنه و برد را لازم داریم، نیازی به رسم نیست. همان مراحل را روی دامنه و برد انجام دهید.

خودت حل کنی بهتره

$$a\,f(b\,x+c)+d$$

اثر روی دامنه

اثر روی برد

نکته برای تبدیل $y=f(x)$ به $y=af(bx+c)+d$، ترتیب مراحل این‌گونه است: $c \to b \to a \to d$

درس‌نامه تبدیل‌های اصلی روی نمودارها، ۳ مدل‌اند: انتقال، قرینه‌یابی و انبساط و انقباض $(a,b>۰)$

		نمودار چه می‌شود؟	نماد ریاضی	اتفاقی که برای ضابطه می‌افتد.
انتقال		a واحد راست	$f(x-a)$	جای xها، $x-a$ می‌گذاریم.
		a واحد چپ	$f(x+a)$	جای xها، $x+a$ می‌گذاریم.
		b واحد بالا	$f(x)+b$	bتا به ضابطه اضافه می‌کنیم.
		b واحد پایین	$f(x)-b$	bتا از ضابطه کم می‌کنیم.
قرینه‌یابی		قرینه نسبت به محور xها	$-f(x)$	کل ضابطه را قرینه می‌کنیم.
		قرینه نسبت به محور yها	$f(-x)$	جای xها، $-x$ می‌گذاریم.
		قرینه نسبت به مبدأ	$-f(-x)$	هر دو کار بالا با هم!
انبساط و انقباض	افقی	انبساط افقی با ضریب ۲	$f(\frac{x}{۲})$	جای xها، $\frac{x}{۲}$ می‌گذاریم.
		انقباض افقی با ضریب $\frac{۱}{۲}$	$f(۲x)$	جای xها، ۲x می‌گذاریم.
	عمودی	انبساط عمودی با ضریب ۲	$۲f(x)$	کل ضابطه ضربدر ۲ می‌شود.
		انقباض عمودی با ضریب $\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۲}f(x)$	کل ضابطه ضربدر $\frac{۱}{۲}$ می‌شود.

پاسخ تشریحی با توجه به نمودار f، مرحله‌به‌مرحله به تابع $y = 2f(\frac{1}{2}x + 1) - 1$ می‌رسیم و دامنه و برد را در هر مرحله می‌نویسیم:

(سوم، دوم، اول، چهارم)

یک واحد چپ — xها ضربدر ۲ — yها ضربدر ۲ — یک واحد پایین

	$f(x)$	$f(x+1)$	$f(\frac{1}{2}x+1)$	$2f(\frac{1}{2}x+1)$	$2f(\frac{1}{2}x+1)-1$
دامنه	$(-2,3]$	$(-3,2]$	$(-6,4]$	$(-6,4]$	$(-6,4]$
برد	$(1,4]$	$(1,4]$	$(1,4]$	$(2,8]$	$(1,7]$

پس دامنه و برد نهایی به ترتیب بازه‌های $(-6,4]$ و $(1,7]$ هستند که اشتراکشان بازهٔ $(1,4]$ می‌باشد.

این بازه شامل ۳ عدد صحیح است: $\{2,3,4\}$

تست و پاسخ ۲۵

اگر f تابع همانی و $g(x) = \begin{cases} x.f(2x-4) & x \geq 0 \\ (1-2x).f(2x) & x < 0 \end{cases}$ باشد، آن‌گاه مجموعهٔ مقادیر تابع g در بزرگ‌ترین بازه‌ای که این تابع در آن نزولی می‌باشد، کدام است؟

۱) $[-1,0]$ ۲) $[1,2]$ ۳) $[-2,0]$ ۴) $[0,2]$

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره روی رسم توابع تا آن‌جایی که می‌توانید کار کنید.

خودت حل کنی بهتره وقتی f همانی باشد، آن‌گاه $f(\text{☁}) = \text{☁}$. هر دو ضابطهٔ g، سهمی‌هایی با ضابطهٔ $y = ax^2 + bx$ هستند که با ریشه‌هایشان قابل رسم‌اند.

نکته ضابطهٔ تابع همانی به صورت $f(x) = x$ است و نمودارش همان نیمساز ناحیهٔ اول و سوم یا بخشی از آن می‌باشد.

نکته برای رسم سهمی $f(x) = ax^2 + bx$ از ریشه‌هایش کمک می‌گیریم:

- سهمی حتماً از مبدأ و نقطهٔ $(\frac{-b}{a}, 0)$ می‌گذرد.
- عرض رأس سهمی به ازای $x = \frac{-b}{2a}$ (وسط $x = 0$ و $x = \frac{-b}{a}$) مشخص می‌شود.
- رو به بالا یا پایین بودن دهانهٔ سهمی هم با علامت a معلوم می‌شود.

پاسخ تشریحی اگر f تابع همانی باشد، ضابطه‌اش به صورت $f(x) = x$ است و در نتیجه:

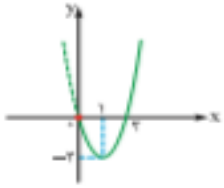
$$\begin{cases} f(2x-4) = 2x-4 \\ f(2x) = 2x \end{cases}$$

تابع g را می‌نویسیم:

$$g(x) = \begin{cases} x\underbrace{f(2x-4)}_{2x-4} & x \geq 0 \\ (1-2x)\underbrace{f(2x)}_{2x} & x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \underbrace{2x^2 - 4x}_{\text{سهمی ۱}} & x \geq 0 \\ \underbrace{-4x^2 + 2x}_{\text{سهمی ۲}} & x < 0 \end{cases}$$

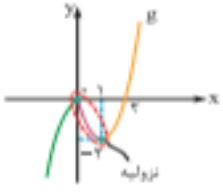
هر دو سهمی را در دامنهٔ مورد نظر رسم می‌کنیم:

سهمی ۱: $y = 2x^2 - 4x = 2x(x-2) \Rightarrow \begin{cases} \text{ریشه‌ها}: 0, 2 \\ \text{رأس}: (1, -2) \\ a > 0 \Rightarrow \text{دهانه‌رو به‌بالا} \end{cases} \xrightarrow{x \geq 0}$



سهمی ۲: $y = -4x^2 + 2x = 2x(-2x+1) \Rightarrow \begin{cases} \text{ریشه‌ها}: 0, \frac{1}{2} \\ \text{رأس}: (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \\ a < 0 \Rightarrow \text{دهانه‌رو به‌پایین} \end{cases} \xrightarrow{x < 0}$

پس نمودار تابع g به شکل مقابل است:



تابع g به ازای $0 \leq x \leq 1$ نزولی است و در این محدوده، مقادیر یا همان برد تابع، بازهٔ $[-2, 0]$ است.

تست و پاسخ ۲۶

نمودارهای دو تابع $f(x) = |x| + |x-4|$ و $g(x) = |x+1| - |x-3|$ در چند نقطه مشترک‌اند؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره رسم سریع توابع گلدانی و سرسره‌ای را بلد باشید.

خودت حل کنی بهتره با دادن ریشه‌های داخل قدرمطلق و یکی بعد از ریشهٔ بزرگ‌تر و یکی قبل از ریشهٔ کوچک‌تر نمودارها را رسم کنید.

درس‌نامه برای رسم توابعی که به صورت جمع یا تفریق قدرمطلق چند عبارت درجه‌اول هستند، مراحل زیر را انجام می‌دهیم:

۱) مقدار تابع را در ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها حساب می‌کنیم.

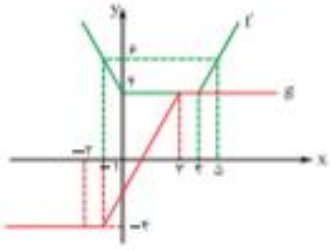
۲) مقدار تابع را در یک عدد بزرگ‌تر از ریشهٔ بزرگ‌تر و یک عدد کوچک‌تر از ریشهٔ کوچک‌تر حساب می‌کنیم.

۳) نقاط بالا را به هم وصل می‌کنیم تا به نمودار تابع برسیم.

نکته دو تابع قدرمطلقی معروف داریم که آن‌ها را با جزئیاتشان در جدول زیر می‌بینید.

	ضابطه	شکل تابع	تقارن	برد
گلدانی	$y = \lvert x-a \rvert + \lvert x-b \rvert$		محور تقارن: $x = \frac{a+b}{2}$	$[\lvert b-a \rvert, +\infty)$
سرسره‌ای (آبشاری)	$y = \lvert x-a \rvert - \lvert x-b \rvert$		مرکز تقارن: $(\frac{a+b}{2}, 0)$	$[-\lvert b-a \rvert, \lvert b-a \rvert]$

پاسخ تشریحی هر دو تابع را در یک دستگاه رسم می‌کنیم:



$f(x)=|x|+|x-۴| \xrightarrow{\text{جدول نقاط}}$

	قبل	ریشه		بعد
x	-۱	۰	۴	۵
y	۶	۴	۴	۶

$g(x)=|x+۱|-|x-۳| \xrightarrow{\text{جدول نقاط}}$

	قبل	ریشه		بعد
x	-۲	-۱	۳	۴
y	-۴	-۴	۴	۴

در بازهٔ $[۳,۴]$ دو تابع بر هم منطبق‌اند، پس بی‌شمار نقطهٔ مشترک دارند.

تست و پاسخ ۲۷

اگر $(fog)(x)=\frac{۲x-۱}{x+۱}$ و $g(x)=\frac{۲}{x-۱}$، آن‌گاه نمودار تابع $y=f(۱-۲x)$ محور yها را با کدام عرض قطع می‌کند؟

۱) $-۲/۵$ ۲) $۱/۲۵$

۳) $۲/۵$ ۴) $-۱/۲۵$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره سؤالاتی که در آن، fog و f، یا، fog و g، را می‌دهند و از ما، g، یا، f، را می‌خواهند، جزء معروف‌ترین و پرتکرارترین سؤالات کنکور و آزمون‌های آزمایشی‌اند.

خودت حل کنی بهتره در تساوی $f(\frac{۲}{x-۱})=\frac{۲x-۱}{x+۱}$، دنبال xی باشید که داخل پرانتز را یک می‌کند.

درس‌نامه پیداکردن f با داشتن fog و g

حالت اول: اگر fog و g را داشته باشیم و ضابطهٔ f را بخواهیم، مراحل زیر را می‌رویم:

مرحلهٔ اول: $g(x)$ را مساوی t قرار می‌دهیم و از آن x را برحسب t به دست می‌آوریم.

مرحلهٔ دوم: x به دست آمده برحسب t را در تساوی $f(g(x))=\cdots$ قرار می‌دهیم تا $f(t)$ به دست آید.

مرحلهٔ سوم: در تساوی $f(t)=\cdots$، جای تمام tها، x قرار می‌دهیم.

حالت دوم: اگر fog و g را داشته باشیم و $f(a)$ را بخواهیم، مراحل زیر را می‌رویم:

مرحلهٔ اول: $g(x)$ را مساوی a قرار می‌دهیم. فرض کنید جواب این معادله، $x_۰$ می‌شود.

مرحلهٔ دوم: $x_۰$ را در تساوی $f(g(x))=\cdots$ قرار می‌دهیم تا به $f(a)$ برسیم.

پاسخ تشریحی این سؤال، حالت دوم درس‌نامهٔ بالا است.

گام اول: محل تقاطع تابع $f(۱-۲x)$ با محور yها، یعنی باید مقدار x را صفر بدهیم که می‌شود $f(۱)$.

پس ما از تساوی $f(g(x))=\frac{۲x-۱}{x+۱}$، دنبال $f(۱)$ هستیم.

گام دوم: $g(x)$ را مساوی یک قرار می‌دهیم:

$$g(x)=۱ \Rightarrow \frac{۲}{x-۱}=۱ \Rightarrow x=۳$$

گام سوم: $x=۳$ را در تساوی $f(g(x))=\frac{۲x-۱}{x+۱}$ قرار می‌دهیم:

$$f(\underbrace{g(۳)}_{۱})=\frac{۲(۳)-۱}{۳+۱} \Rightarrow f(۱)=\frac{۵}{۴}=۱/۲۵$$

تست و پاسخ ۲۸

اگر $f=\{(۲,۳),(-۱,۱)\}$ و g تابعی خطی باشد، به طوری که $fog=\{(۱,۳),(۰,۱)\}$، آن‌گاه مقدار $g(\frac{-۱}{۳})$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) -۳ ۴) -۴

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره از f و fog می‌توانید دو نقطه روی g را پیدا کنید. g هم که تابع خطی است و با دو نقطه، ضابطه‌اش به دست می‌آید.

پاسخ تشریحی با توجه به $fog=\{(1,3),(0,1)\}$، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases}(1,3)\in fog \Rightarrow f(g(1))=3\\(0,1)\in fog \Rightarrow f(g(0))=1\end{cases}$$

با توجه به $f=\{(2,3),(-1,1)\}$، نتیجه می‌گیریم:

$$\begin{cases}f(2)=3\\f(-1)=1\end{cases}$$

از قسمت‌های مشخص‌شده در بالا نتیجه می‌گیریم: $\underbrace{g(0)=-1}_{\text{عرض از مبدأ}}\ ,\ g(1)=2$

g تابعی خطی با عرض از مبدأ ۱− است، پس ضابطه‌اش به شکل $g(x)=mx-1$ می‌باشد.

از طرفی $g(1)=2$، پس:

$$g(x)=mx-1 \xrightarrow{g(1)=2} 2=m-1 \Rightarrow m=3$$

در نتیجه:

$$g(x)=3x-1 \xrightarrow{x=\frac{-1}{3}} g(\frac{-1}{3})=-1-1=-2$$

تست و پاسخ ۲۹

اگر $f(x)=x-2[\frac{x}{2}]$ و $g(x)=x^2-4x+3$، آن‌گاه برد تابع gof شامل چند عدد صحیح است؟ ([]، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره محاسبهٔ برد fog (یا gof) از سؤالات مهارتی است. در کنکور ۹۹ هم از این مبحث سؤال داشتیم.

خودت حل کنی بهتره در ضابطهٔ f به جای x بیرون براکت، $2\times\frac{x}{2}$ بنویسید و از ۲ فاکتور بگیرید.

درس نامه برای محاسبهٔ برد fog گام‌های زیر را می‌رویم:

گام اول: برد تابع داخلی یعنی g را حساب می‌کنیم (مثلاً می‌شود بازهٔ I).

گام دوم: برد f را با دامنهٔ I حساب می‌کنیم (بهترین راه رسم f با دامنهٔ I است).

نکته $0\le u-[u]<1$

پاسخ تشریحی برای محاسبهٔ برد gof گام‌های زیر را می‌رویم:

گام اول: برد تابع داخلی یعنی f را حساب می‌کنیم. ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=x-2[\frac{x}{2}] \xrightarrow{\text{فاکتور از ۲}} f(x)=2(\frac{x}{2}-[\frac{x}{2}])$$

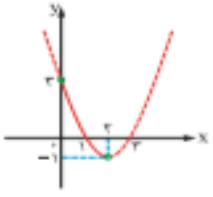
از نکتهٔ گفته‌شده استفاده می‌کنیم:

$$0\le\frac{x}{2}-[\frac{x}{2}]<1 \xrightarrow{\times 2} 0\le f(x)<2 \Rightarrow R_f=[0,2)$$

گام دوم: برد تابع g با دامنهٔ $[0,2)$ را حساب می‌کنیم. بهترین راه رسم نمودار است.

$$g(x)=x^2-4x+3=(x-1)(x-3) \Rightarrow \begin{cases}\text{ریشه‌ها: ۱ و ۳}\\\text{رأس: }(\underbrace{2}_{\text{میانگین ریشه‌ها}},-1)\\a>0 \Rightarrow \text{دهانه رو به بالا}\end{cases}$$

سهمی را با دامنهٔ $0\le x<2$ رسم می‌کنیم:



پس برد gof، بازهٔ $(-1,3]$ است که شامل ۴ عدد صحیح می‌شود: $\{0,1,2,3\}$

تکنیک هر وقت عبارتی به شکل $x - a[\frac{x}{a}]$ دیدید، به جای x بیرون براکت، $a \times \frac{x}{a}$ بنویسید و بعد از a فاکتور بگیرید و از نکتهٔ $0 \le u - [u] < 1$ استفاده کنید.

مثال: $y = x - 3[\frac{x}{3}] = 3 \times \frac{x}{3} - 3[\frac{x}{3}] \xrightarrow{\text{فاکتور از ۳}} 3(\underbrace{\frac{x}{3} - [\frac{x}{3}]}_{0 \le \quad < 1}) \Rightarrow 0 \le y < 3$ (طبق نکته)

تست و پاسخ ۳۰

اگر $f(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{x+1}$ و $(\frac{1}{g})(x) = \sqrt{4x - x^2}$، آن‌گاه دامنهٔ تابع fog کدام است؟

۱) $\mathbb{R} - (0, 4]$ ۲) $\mathbb{R} - [0, 4]$ ۳) $(0, 4) - \{\frac{1}{2}\}$ ۴) $(0, 4)$

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره دامنهٔ fog بارها در کنکور آمده است. دوتا شرط دارد که باید بین آن‌ها اشتراک بگیرید.

نکته دامنهٔ fog دوتا شرط دارد. باید بین جواب‌های آن دو شرط، اشتراک بگیریم:

$$D_{fog} = \{\underbrace{(x \in D_g)}_{\text{شرط (۱)}} \cap \underbrace{(g(x) \in D_f)}_{\text{شرط (۲)}}\}$$

پاسخ تشریحی گام اول، ضابطهٔ g را می‌نویسیم:

$$\frac{1}{g(x)} = \sqrt{4x - x^2} \xrightarrow{\text{معکوس}} g(x) = \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}}$$

گام دوم، دامنهٔ f و g را پیدا می‌کنیم:

$$f(x) = \sqrt{2x-1} + \sqrt{x+1} \xrightarrow{\text{دامنه}} \begin{cases} 2x - 1 \ge 0 \Rightarrow x \ge \frac{1}{2} \\ x + 1 \ge 0 \Rightarrow x \ge -1 \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f = [\frac{1}{2}, +\infty)$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} \xrightarrow{\text{دامنه}} 4x - x^2 > 0 \Rightarrow x(4 - x) > 0 \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} D_g = (0, 4)$$

گام سوم، دامنهٔ fog دوتا شرط دارد:

$$D_{fog} = \{\underbrace{(x \in D_g)}_{\text{شرط (۱)}} \cap \underbrace{(g(x) \in D_f)}_{\text{شرط (۲)}}\}$$

(۱) $x \in (0, 4)$

(۲) $g(x) \in [\frac{1}{2}, +\infty) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{4x - x^2}} \ge \frac{1}{2} \xrightarrow[\text{معکوس می‌کنیم و علامت برمی‌گردد.}]{\text{دو طرف مثبت هستن،}} \sqrt{4x - x^2} \le 2 \xrightarrow[\text{به توان ۲ می‌رسانیم.}]{\text{دو طرف مثبت هستن،}}$

$$4x - x^2 \le 4 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 \ge 0 \Rightarrow \underbrace{(x - 2)^2 \ge 0}_{\text{همواره درست}} \Rightarrow x \in \mathbb{R}$$

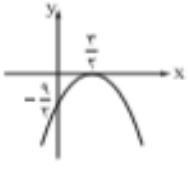
اشتراک می‌گیریم:

$$D_{fog} = (1) \cap (2) = (0, 4) \cap \mathbb{R} = (0, 4)$$

تذکر اگر a و b هم‌علامت و $a > b$ باشد، می‌توانیم دو طرف را معکوس و جهت نامساوی را عوض کنیم: $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$

تست و پاسخ ۳۱

برای رسم نمودار تابع $f(x) = 2x^2 + 2x - 3$ باید به ترتیب چه تغییراتی روی نمودار سهمی داده‌شده اعمال کنیم؟



۱) ۲ واحد به راست، ۳/۵ واحد به بالا، قرینه نسبت به محور yها

۲) ۲ واحد به چپ، ۳/۵ واحد به بالا، قرینه نسبت به محور xها

۳) ۲ واحد به راست، قرینه نسبت به محور yها، ۲/۵ واحد به پایین

۴) ۲ واحد به چپ، قرینه نسبت به محور xها، ۲/۵ واحد به پایین

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره حواستان باشد در سؤالات این مدلی، طراح ممکن است ترتیب مراحل را به شکلی که عرف نیست، از شما بخواهد!

خودت حل کنی بهتره معادلهٔ هر دو سهمی را به شکل مربع کامل بنویسید و بعد گزینه‌ها را چک کنید.

درس‌نامه ۱.

در چند حالت باید بتوانیم معادلهٔ سهمی را سریع‌تر بنویسیم:

الف) وقتی دو ریشهٔ آن یعنی α و β را داریم: $y = a(x-\alpha)(x-\beta)$

ب) وقتی مختصات رأس آن یعنی $S(x_s, y_s)$ را داریم: $y = a(x-x_s)^2 + y_s$

پ) وقتی سهمی در $x=\alpha$ بر محور xها مماس است (در واقع نقطهٔ $(\alpha, 0)$ رأس سهمی است): $y = a(x-\alpha)^2$

درس‌نامه ۲.

۱) انتقال‌های افقی و عمودی $(a, b > 0)$:

	نمودار چه می‌شود؟	نماد ریاضی	اتفاقی که برای ضابطه می‌افتد.	مثال
انتقال	a واحد راست	$f(x-a)$	جای xها، $x-a$ می‌گذاریم.	$y=\sqrt{3x} \xrightarrow{\text{۲ واحد راست}} y=\sqrt{3(x-2)}$
	a واحد چپ	$f(x+a)$	جای xها، $x+a$ می‌گذاریم.	$y=\sqrt{3x} \xrightarrow{\text{۲ واحد چپ}} y=\sqrt{3(x+2)}$
	b واحد بالا	$f(x)+b$	bتا به ضابطه اضافه می‌کنیم.	$y=\sqrt{3x} \xrightarrow{\text{۲ واحد بالا}} y=\sqrt{3x}+2$
	b واحد پایین	$f(x)-b$	bتا از ضابطه کم می‌کنیم.	$y=\sqrt{3x} \xrightarrow{\text{۲ واحد پایین}} y=\sqrt{3x}-2$

۲) قرینه‌یابی:

	نمودار چه می‌شود؟	نماد ریاضی	اتفاقی که برای ضابطه می‌افتد.	مثال
قرینه‌یابی	قرینه نسبت به محور xها	$-f(x)$	کل ضابطه را قرینه می‌کنیم.	$y=\sqrt{3x+1} \Rightarrow y=-\sqrt{3x+1}$
	قرینه نسبت به محور yها	$f(-x)$	جای xها، $-x$ می‌گذاریم.	$y=\sqrt{3x+1} \Rightarrow y=\sqrt{3(-x)+1}$
	قرینه نسبت به مبدأ	$-f(-x)$	هر دو کار بالا با هم!	$y=\sqrt{3x+1} \Rightarrow y=-\sqrt{3(-x)+1}$

پاسخ تشریحی گام اول، معادلهٔ سهمی رسم‌شده را به کمک بخش (پ) درس‌نامهٔ (۱) می‌نویسیم:

سهمی در $x=\frac{3}{2}$ بر محور xها مماس است: $y=a(x-\frac{3}{2})^2$

نقطهٔ $(0, \frac{-9}{2})$ روی سهمی است، پس می‌توانیم a را پیدا کنیم: $\frac{-9}{2}=a(0-\frac{3}{2})^2 \Rightarrow \frac{-9}{2}=\frac{9}{4}a \Rightarrow a=-2$

پس ضابطهٔ سهمی رسم‌شده به صورت $y=-2(x-\frac{3}{2})^2$ است.

گام دوم، ضابطهٔ f را به شکل $y=a(x-x_s)^2+y_s$ می‌نویسیم:

$$f(x)=2x^2+2x-3 \xrightarrow{\text{فاکتور از ۲}} f(x)=2(x^2+x)-3 \xrightarrow[\text{اضافه می‌کنیم}\ -\frac{1}{2}]{\text{داخل پرانتز}\ +\frac{1}{2}\ \text{و}} f(x)=2(\underbrace{x^2+x+\frac{1}{4}}_{(x+\frac{1}{2})^2}-\frac{1}{4})-3$$

$$\Rightarrow f(x)=2(x+\frac{1}{2})^2-\frac{1}{2}-3 \Rightarrow f(x)=2(x+\frac{1}{2})^2-3/5$$

گام سوم: برای تبدیل $y=-2(x-\frac{3}{2})^2$ به $f(x)=2(x+\frac{1}{2})^2-3/5$ باید مراحل زیر را انجام دهیم:

$$y=-2(x-\frac{3}{2})^2 \xrightarrow[(x\to x+2)]{\text{۲ واحد چپ (۱)}} y=-2(x+2-\frac{3}{2})^2=-2(x+\frac{1}{2})^2 \xrightarrow{\text{۳/۵ واحد بالا (۲)}} y=-2(x+\frac{1}{2})^2+3/5$$

$$\xrightarrow{\text{x قرینه نسبت به محور (۳)}} y=-(-2(x+\frac{1}{2})^2+3/5)=2(x+\frac{1}{2})^2-3/5$$

تذکر: البته مدل‌های دیگری هم می‌شد از $y=-2(x-\frac{3}{2})^2$ به $f(x)=2(x+\frac{1}{2})^2-3/5$ رسید.

مثال $y=-2(x-\frac{3}{2})^2 \xrightarrow[(x\to x+2)]{\text{۲ واحد چپ (۱)}} y=-2(x+\frac{1}{2})^2 \xrightarrow{\text{x قرینه نسبت به محور (۲)}} y=2(x+\frac{1}{2})^2$

$$\xrightarrow{\text{۳/۵ واحد پایین (۳)}} y=2(x+\frac{1}{2})^2-3/5$$

تکنیک: برای مربع کامل کردن عبارت درجه۲ به فرم ax^2+bx+c این مراحل را می‌رویم:

مرحلهٔ اول: در دو جملهٔ اول از a فاکتور می‌گیریم: $a(x^2+\frac{b}{a}x)+c$

مرحلهٔ دوم: نصف ضریب x (یعنی $\frac{b}{2a}$) را به توان ۲ می‌رسانیم (می‌شود $\frac{b^2}{4a^2}$) و آن را داخل پرانتز اضافه و کم می‌کنیم:

$$a(\underbrace{x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}}_{\text{مربع کامل}}-\frac{b^2}{4a^2})+c=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{b^2}{4a}+c=a(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{\overbrace{(-b^2+4ac)}^{-\Delta}}{4a}$$

تست و پاسخ ۳۲

تابع با ضابطهٔ $f(x)=|4a-x^3|$ که در آن $a<0$ است، در بازهٔ $(-\infty,a)$ نزولی است. بیشترین مقدار a کدام است؟

۱) $-\sqrt[3]{4}$ ۲) -2 ۳) -4 ۴) $-\sqrt[3]{2}$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره: این تست شبیه یکی از تمرین‌های صفحهٔ ۱۰ کتاب درسی‌تان است، ولی از آن سخت‌تر است. از کتاب درسی غافل نشوید.

خودت حل کنی بهتره: تابع $y=|x^3+(-4a)|$ را رسم کنید. کلید حل، طول نقطهٔ برخورد تابع با محور xهاست.

نکته: هر وقت لازم شد می‌توانیم داخل قدرمطلق را در منفی ضرب کنیم؛ مثلاً $|a-b|$ با $|-a+b|$ یا $|b-a|$ برابر است.

نکته: برای رسم نمودار تابع $f(x)=|g(x)|$ ابتدا نمودار تابع $y=g(x)$ را رسم کرده، سپس قسمت‌هایی از نمودار تابع g که زیر محور xها هستند را نسبت به محور xها قرینه کنید.

پاسخ تشریحی: گام اول، ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=|4a-x^3| \xrightarrow[\text{داخل قدرمطلق}]{\text{قرینه کردن}} f(x)=|x^3-4a|$$

با توجه به این‌که $a<0$ است، $-4a>0$ می‌شود:

$$f(x)=|x^3+\underbrace{(-4a)}_{\text{مثبت}}|$$

گام دوم، تابع f را مرحله‌به‌مرحله رسم می‌کنیم:

گام سوم، برای به دست آوردن k باید x^3-4a را مساوی صفر قرار دهیم: $x^3-4a=0 \Rightarrow x^3=4a \Rightarrow x=\sqrt[3]{4a} \Rightarrow k=\sqrt[3]{4a}$

گام چهارم، f در بازهٔ $(-\infty,a)$ نزولی است، پس a باید قبل یا روی k باشد:

$$a \le k \Rightarrow a \le \sqrt[3]{4a} \xrightarrow{\text{توان ۳}} a^3 \le 4a \Rightarrow \underbrace{a}_{\text{منفی}}(a^2-4) \le 0 \xrightarrow{a<0} a^2-4 \ge 0 \Rightarrow a^2 \ge 4 \Rightarrow |a| \ge 2 \xrightarrow{a<0}$$

$$-a \ge 2 \Rightarrow a \le -2$$

پس بیشترین مقدار a برابر ۲− است.

تست و پاسخ ۳۳

اگر $f(x)=(x^2+3)(x+3)$. آن‌گاه مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $f(2x^2-x) \le 16$ کدام است؟

۱) $[-\frac{1}{2},1]$

۲) $[-1,\frac{1}{2}]$

۳) $[\frac{1}{2},1]$

۴) $[0,1]$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره در سؤالات نامعادله که به شکل تابعی هستند، حواستان به ویژگی‌های یکنوایی توابع باشد.

خودت حل کنی بهتره اگر f تابعی صعودی اکید و $f(\bigcirc) \le f(\square)$. آن‌گاه: $\bigcirc \le \square$

نکته اگر f تابعی اکیداً یکنوا باشد، برای حل نامعادلهٔ $f(a)>f(b)$ دو حالت پیش می‌آید:

f اکیداً صعودی	در نامعادلهٔ $f(a)>f(b)$، با حذف fها، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند: $a>b$
f اکیداً نزولی	در نامعادلهٔ $f(a)>f(b)$، با حذف fها، جهت نامساوی تغییر می‌کند: $a<b$

نکته در تابع درجه‌سوم $y=k(x-\alpha)^3+\beta$، نقطهٔ (α,β) مرکز تقارن تابع است و با توجه به علامت k، نمودار به صورت یکی از دو شکل زیر است:

$k>0$	$k<0$
اکیداً صعودی	اکیداً نزولی

پاسخ تشریحی ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x)=(x^2+2)(x+3)=x^3+3x^2+3x+\underset{\substack{\downarrow\\ 1+8}}{9}=\underbrace{x^3+3x^2+3x+1}_{(x+1)^3}+8=(x+1)^3+8$$

پس f تابعی صعودی اکید است و نامعادلهٔ ما به شکل $f(2x^2-x)\le 16$ است.

جای ۱۶ می‌توانیم $f(1)$ قرار دهیم؛ چون:

$$(x+1)^3+8=16 \Rightarrow (x+1)^3=8 \xrightarrow{\text{فرجه ۳}} x+1=2 \Rightarrow x=1$$

الان قیافهٔ نامعادله بهتر شد:

$$f(2x^2-x)\le \overset{f(1)}{16} \Rightarrow f(2x^2-x)\le f(1)$$

چون f صعودی است، با حذف fها جهت عوض نمی‌شود:

$$2x^2-x\le 1 \Rightarrow 2x^2-x-1\le 0 \xrightarrow[\text{ریشه‌ها: } x=1,\ x=-\frac{1}{2}]{a+b+c=0} (2x+1)(x-1)\le 0 \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} \frac{-1}{2}\le x\le 1$$

تست و پاسخ ۳۴

برد تابع $f(x)=x^2$ با دامنهٔ A به صورت $\{0,1,4\}$ است. مجموعهٔ A حداکثر چند عضو دارد؟

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره وقتی در سؤالات، کلمه‌هایی مثل «حداکثر مقدار» یا «حداکثر عضو» را می‌بینید، بدانید که در جواب آن، چند حالت پیش می‌آید.

خودت حل کنی بهتره x^2 را برابر با ۰، ۱ و ۴ قرار دهید.

درس‌نامه اگر اعضای برد تابع $f(x)$ را داشته باشیم $(R_f=\{R_1,R_2,\dots\})$ و دامنهٔ f را بخواهیم، باید:

ضابطهٔ $f(x)$ را مساوی R_1, R_2 و ... قرار دهیم و تمام معادله‌ها را حل کنیم.

هر معادله حداقل یک جواب دارد.

$$\begin{cases} f(x)=R_1 \xrightarrow{\text{جواب‌ها}} r_1, r_1', \dots \\ f(x)=R_2 \xrightarrow{\text{جواب‌ها}} r_2, r_2', \dots \\ \vdots \end{cases}$$

دامنهٔ تابع f، شامل حداقل ۱ عضو از جواب هر معادله است:

$$D_f=\{\underbrace{r_1, r_1', \dots}_{\text{حداقل یکی در دامنه است.}}, \underbrace{r_2, r_2', \dots}_{\text{حداقل یکی در دامنه است.}}, \dots\}$$

پاسخ تشریحی گام اول، خروجی‌های تابع، سه عدد ۰، ۱ و ۴ هستند. این سه عدد را برابر با ضابطهٔ تابع قرار می‌دهیم تا مقادیر ورودی (دامنه) را پیدا کنیم:

$$f(x)=0 \Rightarrow x^2=0 \Rightarrow x=0 \qquad f(x)=1 \Rightarrow x^2=1 \Rightarrow x=1 \text{ یا } -1 \qquad f(x)=4 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=2 \text{ یا } -2$$

گام دوم، پس دامنهٔ تابع f می‌تواند به شکل مقابل باشد:

$$D_f=\{0, \underbrace{1,-1}_{\text{حداقل یکی در دامنه است.}}, \underbrace{2,-2}_{\text{حداقل یکی در دامنه است.}}\}$$

یعنی دامنه حداکثر ۵ عضو و حداقل ۳ عضو دارد.

تست و پاسخ ۳۵

اگر $f(x)=\dfrac{2ax^2+4x+6}{2x^2+bx-3}$ تابعی ثابت باشد، طول نقطهٔ تقاطع آن با تابع $g(x)=ax-b$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

نکته اگر تابع به فرم $y=\frac{ax^n+bx^{n-1}+\cdots}{a'x^n+b'x^{n-1}+\cdots}$ تابعی ثابت (با ضابطهٔ $y=k$) باشد، آن‌گاه: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\cdots=\underset{\text{(ضابطهٔ تابع)}}{k}$

پاسخ تشریحی گام اول، با توجه به نکتهٔ بالا، داریم:

$$f(x)=\frac{2ax^2+4x+6}{2x^2+bx-3}\xrightarrow{\text{f ثابت}}\frac{2a}{2}=\frac{4}{b}=\frac{6}{-3}\Rightarrow a=\frac{4}{b}=-2\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b=-2\end{cases}$$

گام دوم، ضابطهٔ f را می‌نویسیم:

$$f(x)=\frac{2ax^2+4x+6}{2x^2+bx-3}\xrightarrow{a=b=-2}f(x)=\frac{\overbrace{-4x^2+4x+6}^{\text{فاکتور از }-2}}{2x^2-2x-3}=\frac{-2(2x^2-2x-3)}{2x^2-2x-3}=-2$$

گام سوم، ضابطهٔ g را می‌نویسیم:

$$g(x)=ax-b\xrightarrow{a=b=-2}g(x)=-2x+2$$

گام چهارم، f و g را قطع می‌دهیم:

$$\left.\begin{array}{l}f(x)=-2\\g(x)=-2x+2\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{تقاطع}}f(x)=g(x)\Rightarrow-2=-2x+2\Rightarrow x=2$$

تست و پاسخ ۳۶

نمودار تابع خطی f داده شده است. اگر $h(x)=2xf(x)+g(x)$ تابعی همانی باشد، نمودار تابع g شبیه نمودار کدام گزینه است؟

۱)

۲)

۳)

۴)

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره نمایش‌های مختلف توابع ثابت و همانی را بلد باشید.

خودت حل کنی بهتره معادلهٔ تابع خطی f را بنویسید. بعد جای تابع $h(x)$، x را قرار دهید.

درس‌نامه ۱. توابع همانی و ثابت

	ضابطه	نمایش زوج مرتبی	نمایش نموداری
همانی	$f(x)=x$	مؤلفه‌های اول و دوم همهٔ زوج مرتب‌ها با هم برابر است.	نیمساز ربع اول و سوم
ثابت	$f(x)=c$	مؤلفهٔ دوم همهٔ زوج مرتب‌ها با هم برابر است.	یک خط افقی

درس‌نامه ۲. نوشتن معادلهٔ خط در چند حالت پرکاربرد

۱	معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ (x_0,y_0) با شیب m	$y-y_0=m(x-x_0)$	$m=\frac{\Delta y}{\Delta x}$
۲	معادلهٔ خط با شیب m و عرض از مبدأ h	$y=mx+h$	
۳	معادلهٔ خط با طول از مبدأ p و عرض از مبدأ q	$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=1$	

پاسخ تشریحی گام اول: f تابع خطی با طول از مبدأ $p=۴$ و عرض از مبدأ $q=۲$ است. معادلهٔ آن به صورت زیر می‌شود:

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}=۱ \Rightarrow \frac{x}{۴}+\frac{y}{۲}=۱ \xrightarrow{\times ۲} y=\frac{-x}{۲}+۲ \Rightarrow f(x)=\frac{-x}{۲}+۲$$

گام دوم: تابع h را تشکیل می‌دهیم:

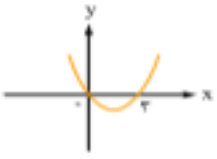
$$h(x)=۲xf(x)+g(x) \xrightarrow{f(x)=\frac{-x}{۲}+۲} h(x)=۲x(\frac{-x}{۲}+۲)+g(x)$$

$$\Rightarrow h(x)=-x^۲+۴x+g(x)$$

گام سوم: h همانی است؛ پس:

$$\underbrace{h(x)}_{x}=-x^۲+۴x+g(x) \Rightarrow g(x)=x^۲-۳x=x(x-۳)$$

گام چهارم: g یک سهمی با دهانهٔ رو به بالا و ریشه‌های $x=۰$ و $x=۳$ است؛ پس نمودارش به شکل مقابل است:



تست و پاسخ ۳۷

نمودار تابع $f(x)=۱+[x]$ و نمودار تابع خطی با شیب ۱/۵ که از مبدأ مختصات می‌گذرد، چند نقطهٔ مشترک دارند؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است.)

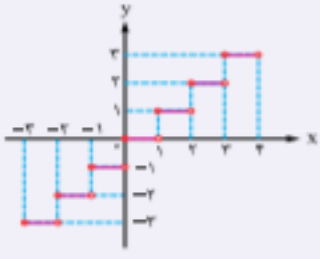
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره نمودار هر دو تابع را بکشید.

نکات

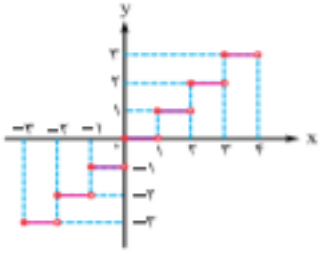
۱) نمودار تابع $y=[x]$ به شکل مقابل است:



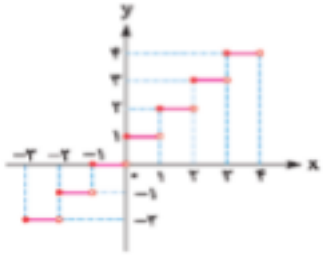
۲) برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+۱$ باید نمودار $y=f(x)$ را ۱ واحد به بالا ببریم.

۳) معادلهٔ تابع خطی مبدأگذر با شیب m به صورت $f(x)=mx$ است.

پاسخ تشریحی گام اول: نمودار تابع $y=[x]$ را رسم می‌کنیم:

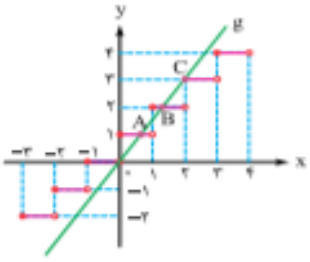


گام دوم: نمودار گام قبل را ۱ واحد به بالا می‌بریم تا به نمودار $f(x)=[x]+۱$ برسیم:



گام سوم: نمودار تابع خطی $g(x)=1/5x$ را رسم می‌کنیم:

x	۰	۲
$y=1/5x$	۰	۳



نمودار توابع f و g در ۳ نقطهٔ A، B و C مشترک‌اند.

تست و پاسخ ۳۸

نمودار $f(x)=|x|$ را یک واحد به راست و ۲ واحد به پایین و نمودار $g(x)=-x^2$ را یک واحد به چپ و ۲ واحد به بالا می‌بریم. دو نمودار جدید در کدام طول منفی متقاطع‌اند؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) -3 ۴) $-\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره یکی از سؤالات معروف تبدیل توابع این است که روی یک ضابطه چند تبدیل انجام می‌دهند و سپس محل برخورد ضابطهٔ نهایی را با یک تابع یا یک محور از شما می‌پرسند.

خودت حل کنی بهتره درگیر حل معادلهٔ آخر نشوید. گزینه‌ها را چک کنید.

درس‌نامه انتقال و قرینه‌یابی

	نمودار چه می‌شود؟	نماد ریاضی	اتفاقی که برای ضابطه می‌افتد.
انتقال $(a,b>0)$	a واحد راست	$f(x-a)$	جای xها، $x-a$ می‌گذاریم.
	a واحد چپ	$f(x+a)$	جای xها، $x+a$ می‌گذاریم.
	b واحد بالا	$f(x)+b$	b واحد به آن اضافه می‌شود.
	b واحد پایین	$f(x)-b$	b واحد از آن کم می‌شود.
قرینه‌یابی	نسبت به محور xها	$-f(x)$	جای y، $-y$ می‌گذاریم.
	نسبت به محور yها	$f(-x)$	جای xها، $-x$ می‌گذاریم.
	نسبت به مبدأ	$-f(-x)$	هر دو کار بالا با هم!
	نسبت به خط $x=k$	$f(2k-x)$	جای xها، $2k-x$ می‌گذاریم.
	نسبت به خط $y=k$	$2k-f(x)$	جای y، $2k-y$ می‌گذاریم.

پاسخ تشریحی گام اول: نمودار $y=|x|$ را یک واحد به راست و ۲ واحد به پایین می‌بریم:

$$y=|x| \xrightarrow[x\to x-1]{\text{۱ واحد راست}} y=|x-1| \xrightarrow{\text{۲ واحد پایین}} y=|x-1|-2$$

گام دوم: نمودار $y=-x^2$ را یک واحد به چپ و ۲ واحد به بالا می‌بریم:

$$y=-x^2 \xrightarrow[x\to x+1]{\text{۱ واحد چپ}} y=-(x+1)^2 \xrightarrow{\text{۲ واحد بالا}} y=-(x+1)^2+2$$

گام سوم: برای قطع‌دادن دو تابع به دست آمده باید ضابطه‌هایشان را برابر قرار دهیم:

$$\left.\begin{array}{l} y=|x-1|-2 \\ y=-(x+1)^2+2 \end{array}\right\} \Rightarrow |x-1|-2=-(x+1)^2+2 \Rightarrow (x+1)^2+|x-1|=4$$

گام چهارم، راه اول، بهترین راه برای حل معادلهٔ قبل، چک‌کردن گزینه‌هاست. فقط به ازای $x=-2$ تساوی برقرار است.

راه دوم، چون جواب منفی را می‌خواهیم؛ پس $x<0$ و در نتیجه $x-1<0$، یعنی از قدرمطلق، قرینهٔ عبارت داخلش بیرون می‌آید:

$$(x+1)^2+|\underbrace{x-1}_{\text{منفی}}|=4 \xrightarrow{x-1<0} x^2+2x+1-x+1=4 \Rightarrow x^2+x-2=0 \xrightarrow[(x<0)]{a+b+c=0} \begin{cases} x_1=1 & \times \\ x_2=-2 & \checkmark \end{cases}$$

تست و پاسخ ۳۹

برد تابع $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-x}$ کدام است؟

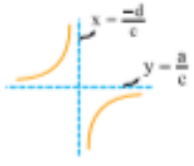
۱) $\mathbb{R}-\{1\}$ ۲) $\mathbb{R}-\{\frac{1}{2}\}$ ۳) $\mathbb{R}-\{1,2\}$ ۴) $\mathbb{R}-\{1,0\}$

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره در تابع به فرم $\frac{AB}{AC}$، بعد از ساده‌کردن A از صورت و مخرج، مراقب اتفاقاتی که برای دامنه و در نتیجه برای برد می‌افتد، باشید.

خودت حل کنی بهتره صورت و مخرج f را تجزیه کنید.

درس‌نامه نکات مهم تابع هموگرافیک با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$

شرط هموگرافیک‌بودن	$ad-bc\neq 0$ و $c\neq 0$
دامنه	$\mathbb{R}-\{\frac{-d}{c}\}$
برد	$\mathbb{R}-\{\frac{a}{c}\}$
معادلهٔ خط‌چین عمودی	$x=\frac{-d}{c}$
معادلهٔ خط‌چین افقی	$y=\frac{a}{c}$
ضابطهٔ وارون	$f^{-1}(x)=\frac{-dx+b}{cx-a}$
شرط برابری f و f^{-1}	$a+d=0$
مرکز تقارن	$W(\frac{-d}{c},\frac{a}{c})$
محورهای تقارن	دو خط با شیب‌های ± 1 و گذرنده از نقطهٔ W
شکل تابع	
	$ad-bc>0$
	$ad-bc<0$

نکته ۱) تابع هموگرافیک، تابعی یک‌به‌یک است.

۲) اگر از دامنهٔ تابع یک‌به‌یک f، عدد a را حذف کنیم، عدد $f(a)$ هم از بردش حذف می‌شود.

پاسخ تشریحی گام اول، ضابطه را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x^2-x}=\frac{(x-1)(x+1)}{x(x-1)} \xrightarrow{x\neq 1} f(x)=\frac{x+1}{x}$$

www.mapedu.ir

گام دوم:

- f تابعی هموگرافیک است؛ پس بردش شامل $\frac{a}{c}=1$ نمی‌شود.
- از طرفی چون f یک‌به‌یک است و عدد $x=1$ در دامنه‌اش نیست؛ پس $f(1)=2$ هم در برد نیست.

بنابراین برد f شامل دو عدد ۱ و ۲ نمی‌شود: $R_f=\mathbb{R}-\{1,2\}$

تست و پاسخ ۴۰

دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{3-x}+\sqrt{\frac{x-3}{5-x}}$ و $g(x)=\sqrt{-x^2+ax+b}+c$ با هم برابرند. مقدار $a+b+c$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۶- ۳) ۳ ۴) ۳-

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره در سؤالات تساوی توابع، اول دامنه‌ها را مقایسه کنید. بعد اگر لازم شد سراغ مقایسهٔ ضابطه‌ها هم بروید.

خودت حل کنی بهتره دامنهٔ g زمانی تک‌عضوی می‌شود که زیر رادیکال، ضریب منفی از یک عبارت مربع کامل باشد.

درس‌نامه تساوی توابع

توابع f و g با هم برابرند، اگر هر دو شرط زیر را داشته باشند:

۱) دامنه‌هایشان برابر باشد.

۲) ضابطه‌هایش قابل تبدیل به هم باشد (یعنی بتوانیم قیافهٔ یکی را بعد از یک سری عمل جبری و ... ، مثل دیگری بنویسیم).

نکته دامنهٔ تابع به فرم عبارت درجه‌دو $f(x)=\sqrt{\text{عبارت درجه‌دو}}$ فقط زمانی شامل یک عضو است که عبارت زیر رادیکال، ضریب منفی از یک عبارت مربع کامل باشد:

$$D_f=\{k\} \Rightarrow f(x)=\sqrt{\underbrace{a}_{\text{منفی}}(x-k)^2}$$

پاسخ تشریحی گام اول: دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{3-x}+\sqrt{\frac{x-3}{5-x}}$ را حساب می‌کنیم. باید عبارت‌های زیر هر دو رادیکال، بزرگ‌تر یا مساوی صفر باشند:

$$\left.\begin{array}{l}\text{شرط ۱}: 3-x\ge 0 \Rightarrow x\le 3\\ \text{شرط ۲}: \frac{x-3}{5-x}\ge 0 \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} 3\le x<5\end{array}\right\} \xrightarrow{\text{اشتراک}} D_f=\{3\}$$

گام دوم: برای آن‌که f و g برابر باشند، اول از همه باید دامنه‌هایشان برابر باشد؛ پس دامنهٔ تابع $g(x)=\sqrt{-x^2+ax+b}+c$ باید فقط شامل عدد ۳ باشد. طبق نکتهٔ درس‌نامه، عبارت زیر رادیکال به شکل $\underbrace{-}_{\text{ضریب } x^2}(x-3)^2$ است؛ پس:

$$g(x)=\sqrt{-(x-3)^2}+c=\sqrt{-x^2+\underbrace{6}_{a}x-\underbrace{9}_{b}}+c$$

گام سوم: مقدار دو تابع در $x=3$ باید برابر باشد:

$$f(3)=g(3) \Rightarrow 0+0=0+c \Rightarrow c=0$$

گام چهارم:

$$a+b+c=6+(-9)+0=-3$$

تست و پاسخ ۴۱

اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2} & [x]>\frac{1}{2}\\ 3x & [2x]<-1\end{cases}$ و $g(x)=x-1$ باشند، معادلهٔ $f(x)=g(x)$ چند جواب دارد؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل‌کنی بهتره هر کدام از ضابطه‌های f را با g برابر قرار دهید. حواستان باشد که جواب به دست آمده در D_f باشد.

پاسخ تشریحی ضابطهٔ g را با هر دو ضابطهٔ f برابر قرار می‌دهیم. اگر جواب به دست آمده در دامنهٔ f قرار داشت، قابل قبول است. در غیر این صورت قابل قبول نیست.

گام اول: ضابطهٔ اول f را با g برابر قرار می‌دهیم:

$$\underbrace{f(x)}_{\text{ضابطهٔ اولش}} = g(x) \Rightarrow \frac{x}{۲} = x - ۱ \Rightarrow x = ۲ \quad ✓$$

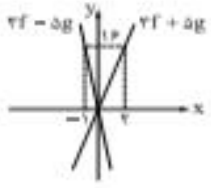
حالا باید چک کنیم $x = ۲$ در دامنهٔ f یعنی $[x] > \frac{۱}{۲}$ صدق می‌کند یا خیر؟ چون $[۲] > \frac{۱}{۲}$، پس قابل قبول است.

گام دوم: ضابطهٔ دوم f را با g برابر قرار می‌دهیم:

$$\underbrace{f(x)}_{\text{ضابطهٔ دومش}} = g(x) \Rightarrow ۳x = x - ۱ \Rightarrow x = \frac{-۱}{۲} \quad ×$$

حالا باید چک کنیم $x = \frac{-۱}{۲}$ در دامنهٔ f یعنی $[۲x] < -۱$ صدق می‌کند یا خیر؟ چون $[-۱] < -۱$ غلط است، پس قابل قبول نیست. در نتیجه، معادله فقط یک جواب $(x = ۲)$ دارد.

تست و پاسخ ۴۲



نمودار توابع $۳f + ۵g$ و $۳f - ۵g$ به صورت داده‌شده است. مساحت محدود به نمودارهای توابع f، g و خط $y = x + ۷$ کدام است؟

۱) ۶۴
۲) ۵۶
۳) ۲۸
۴) ۳۲

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره برای حل سؤالات مساحت محدود بین چند نمودار، حتماً شکل بکشید.

خودت حل‌کنی بهتره معادلهٔ توابع خطی $۳f + ۵g$ و $۳f - ۵g$ را بنویسید. بعد با حل دستگاه دو معادله ـ دو مجهول، f و g را پیدا کنید.

تکنیک محاسبهٔ مساحت یک nضلعی محدب با داشتن مختصات رئوسش:

فرض کنید مختصات ۳ رأس مثلث ABC به صورت مقابل است:

از یک رأس (مثل A) شروع می‌کنیم و با چرخش دوباره به A می‌رسیم:

$$A \to B \to C \to A$$

مختصات‌ها را هم به همین شکل می‌نویسیم:

A	B	C	A
۲	۱	−۱	۲
−۴	۶	۳	−۴

اعداد روی ابتدا و انتهای هر خط آبی را در هم ضرب و حاصل آن‌ها را با هم جمع می‌کنیم:

مجموع ضرب فلش‌های آبی: $(۲\times۶) + (۱\times۳) + (-۱\times(-۴)) = ۱۲ + ۳ + ۴ = ۱۹$

این کار را برای فلش‌های قرمز هم انجام می‌دهیم: مجموع فلش‌های قرمز: $(-۴\times۱) + (۶\times(-۱)) + (۳\times۲) = -۴ - ۶ + ۶ = -۴$

نصف قدرمطلق تفاضل دو مقدار بالا، برابر با مساحت مثلث ABC است:

$$S = \frac{|\text{مجموع فلش‌های قرمز} - \text{مجموع فلش‌های آبی}|}{۲} = \frac{|۱۹ - (-۴)|}{۲} = \frac{۲۳}{۲} = ۱۱/۵$$

پاسخ تشریحی گام اول: هر دو خط رسم‌شده از مبدأ می‌گذرند، پس معادله‌شان به شکل $y = mx$ است. معادلهٔ هر دو را می‌نویسیم:

- $۳f + ۵g:\ y = mx \xrightarrow{(۲,۱۶)} ۱۶ = ۲m \Rightarrow m = ۸ \xrightarrow{\text{بدست}} ۳f + ۵g = ۸x$
- $۳f - ۵g:\ y = m'x \xrightarrow{(-۱,۱۶)} ۱۶ = -m' \Rightarrow m' = -۱۶ \xrightarrow{\text{بدست}} ۳f - ۵g = -۱۶x$

گام دوم، دستگاه قبل را حل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l}3f+5g=8x\\3f-5g=-16x\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{جمع طرفین}}6f=-8x\Rightarrow f=\frac{-4}{3}x$$

با جای‌گذاری $f=\frac{-4}{3}x$ در $3f+5g=8x$، داریم:

$$-4x+5g=8x\Rightarrow 5g=12x\Rightarrow g=\frac{12}{5}x$$

پس:

$$g(x)=\frac{12}{5}x \text{ و } f(x)=\frac{-4}{3}x$$

گام سوم، توابع f و g که در مبدأ متقاطع‌اند. حالا f و g را با خط $\underbrace{y=x+7}_{\text{خط d}}$ قطع می‌دهیم:

- تقاطع f با خط d: $\frac{-4}{3}x=x+7\Rightarrow\frac{7}{3}x=-7\Rightarrow x=-3\xrightarrow{f(x)=\frac{-4}{3}x}y=4\xrightarrow{\text{نقطهٔ تقاطع}}A(-3,4)$
- تقاطع g با خط d: $\frac{12}{5}x=x+7\Rightarrow\frac{7}{5}x=7\Rightarrow x=5\xrightarrow{g(x)=\frac{12}{5}x}y=12\xrightarrow{\text{نقطهٔ تقاطع}}B(5,12)$

گام چهارم، سه رأس مثلث را داریم. مساحت را به کمک تکنیک گفته‌شده حساب می‌کنیم:

O	A	B	O
0	−3	5	0
0	4	12	0

مجموع ضرب فلش‌های قرمز: $(0\times(-3))+(4\times5)+(12\times0)=20$

مجموع ضرب فلش‌های آبی: $(0\times4)+(-3\times12)+(5\times0)=-36$

$$S=\frac{|\text{مجموع فلش‌های قرمز}-\text{مجموع فلش‌های آبی}|}{2}=\frac{|-36-20|}{2}=\frac{56}{2}=28$$

تست و پاسخ ۴۳

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=6x^2-12x-x^3$ از کدام ناحیه(ها) نمی‌گذرد؟

۱) اول و سوم ۲) فقط سوم ۳) فقط اول ۴) از هر چهار ناحیه می‌گذرد.

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره در فصل ۱ کتاب ریاضی دوازدهم، کتاب درسی از شما می‌خواهد که رسم توابع درجه ۳ به فرم $y=a(x-\alpha)^3+\beta$ را بلد باشید.

خودت حل کنی بهتره در تابع با ضابطهٔ $y=a(x-\alpha)^3+\beta$ نقطهٔ (α,β) مرکز تقارن تابع است.

درس‌نامه در تابع درجه‌سوم $y=a(x-\alpha)^3+\beta$، نقطهٔ (α,β) مرکز تقارن تابع است و با توجه به علامت a، نمودار به یکی از دو شکل مقابل است:

$a>0$ (صعودی)	$a<0$ (نزولی)

نکته اتحادهای مکعب معروف که در این قسمت زیاد استفاده می‌شوند، این‌ها هستند:

اتحاد	جملات مهم اتحاد	مثال
$(x\pm1)^3=x^3\pm3x^2+3x\pm1$	$x^3\pm3x^2+3x$	$x^3+3x^2+3x+8\xrightarrow[\text{کردن ۱}]{\text{اضافه و کم}}\underbrace{x^3+3x^2+3x+1}-1+8=(x+1)^3+7$
$(x\pm2)^3=x^3\pm6x^2+12x\pm8$	$x^3\pm6x^2+12x$	$x^3-6x^2+12x+6\xrightarrow[\text{کردن ۸}]{\text{اضافه و کم}}\underbrace{x^3-6x^2+12x}-8+8+6=(x-2)^3+14$

پاسخ تشریحی گام اول، ضابطه را استاندارد می‌نویسیم:

$$f(x)=-x^3+6x^2-12x$$

گام دوم، از منفی فاکتور می‌گیریم:

$$f(x)=-(x^3-6x^2+12x)$$

گام سوم، داخل پرانتز ۸− و ۸+ اضافه می‌کنیم تا مکعب کامل شود:

$$f(x)=-(\underbrace{x^3-6x^2+12x-8}_{(x-2)^3}+8)$$

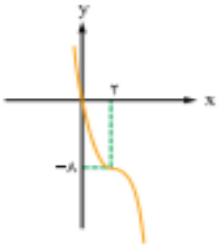
گام چهارم، ضابطه را به فرم مناسب برای رسم، می‌نویسیم:

$$f(x)=-(x-2)^3-8$$

گام پنجم، نقطهٔ $(2,-8)$ مرکز تقارن تابع است و چون $a<0$ است، نزولی است:

x	۰	۱	۲	۳	۴
y	۰	−۷	−۸	−۹	−۱۶

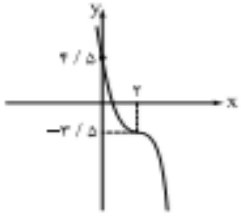
گذر از مبدأ — مرکز تقارن



پس از نواحی اول و سوم عبور نمی‌کند.

تست و پاسخ ۴۴

اگر f و g دو تابع خطی باشند و نمودار تابع $y=(f.g)(x)-x^3$ به شکل داده‌شده باشد، آن‌گاه حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ $(f.g)(x)=0$ کدام است؟



۱) ۴/۵

۲) ۲

۳) ۰/۷۵

۴) −۳/۵

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره در فصل ۱ کتاب ریاضی دوازدهم کتاب درسی از شما می‌خواهد که رسم توابع درجه ۳ به فرم $y=a(x-\alpha)^3+\beta$ را بلد باشید.

خودت حل کنی بهتره در تابع با ضابطهٔ $y=a(x-\alpha)^3+\beta$، نقطهٔ (α,β) مرکز تقارن تابع است. هم‌چنین حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه‌دوم $\frac{c}{a}$ می‌شود.

درس‌نامه در تابع درجه‌سوم $y=a(x-\alpha)^3+\beta$، نقطهٔ (α,β) مرکز تقارن تابع است و با توجه به علامت a، نمودار به یکی از دو شکل روبه‌رو است:

$a>0$ (صعودی)	$a<0$ (نزولی)

نکته ۱) اتحادهای مکعب معروف که در این قسمت زیاد استفاده می‌شوند، این‌ها هستند:

اتحاد	جملات مهم اتحاد	مثال
$(x\pm1)^3=x^3\pm3x^2+3x\pm1$	$x^3\pm3x^2+3x$	$x^3+3x^2+3x+8 \xrightarrow[\text{کردن ۱}]{\text{اضافه و کم}} \underbrace{x^3+3x^2+3x+1}-1+8=(x+1)^3+7$
$(x\pm2)^3=x^3\pm6x^2+12x\pm8$	$x^3\pm6x^2+12x$	$x^3-6x^2+12x+6 \xrightarrow[\text{کردن ۸}]{\text{اضافه و کم}} \underbrace{x^3-6x^2+12x-8}+8+6=(x-2)^3+14$

۲) در معادلهٔ درجه‌دوم $ax^2+bx+c=0$، اگر $\Delta>0$ باشد، حاصل‌ضرب ریشه‌ها از رابطهٔ $P=\frac{c}{a}$ به دست می‌آید.

پاسخ تشریحی گام اول: مرکز تقارن تابع درجه‌سوم داده‌شده، نقطهٔ $(2,-3/5)$ است؛ پس ضابطهٔ آن به شکل زیر است:

$$y=a(x-\alpha)^3+\beta \xrightarrow[\beta=-3/5]{\alpha=2} y=a(x-2)^3-3/5$$

گام دوم: نمودار این تابع از نقطهٔ $(0,4/5)$ می‌گذرد؛ پس:

$$4/5=a(0-2)^3-3/5 \Rightarrow 8=-8a^3 \Rightarrow a^3=-1 \Rightarrow a=-1$$

پس ضابطه به شکل $y=-(x-2)^3-3/5$ است.

گام سوم: ضابطهٔ گام قبل را با $(fg)(x)-x^3$ برابر قرار می‌دهیم:

$$-\underbrace{(x-2)^3}_{\text{باز می‌کنیم}}-3/5=(fg)(x)-x^3 \Rightarrow -(x^3-6x^2+12x-8)-3/5=(fg)(x)-x^3 \Rightarrow (fg)(x)=6x^2-12x+4/5$$

گام چهارم: دلتای این معادله برابر ۳۶ و مثبت است. حاصل‌ضرب جواب‌های معادلهٔ درجه‌دوم از رابطهٔ $P=\frac{c}{a}$ به دست می‌آید؛ پس:

$$(fg)(x)=0 \Rightarrow 6x^2-12x+4/5=0 \Rightarrow P=\frac{4/5}{6}=\frac{3}{4}=0/75$$

تست و پاسخ ۴۵

اگر تابع $f(x)=(m-2)x^2+(m+1)x$ در بازهٔ $[2,+\infty)$ اکیداً نزولی باشد، حداکثر مقدار m کدام است؟

۱) ۲
۲) ۱
۳) صفر
۴) ۱/۴

پاسخ: گزینه ۴

مشاوره بعضی توابع (مثل سهمی‌ها یا قدرمطلقی‌ها یا ...) یک‌به‌یک نیستند، ولی در بازه‌ای خاص یک‌به‌یک‌اند. درس‌نامهٔ این تست را بخوانید.

خودت حل کنی بهتره اگر ضریب x^2 منفی باشد، باید $x=2$ بعد از رأس سهمی یا طول خود رأس سهمی باشد.

درس‌نامه ۱. بازه‌های یکنوایی در توابع غیریکنوا

تابع	ضابطه	نمودار	نقطهٔ مرزی بازه‌های یکنوایی
سهمی	$y=ax^2+bx+c$		رأس
قدرمطلق خطی	$y=\pm\lvert ax+b\rvert$		ریشهٔ داخل قدرمطلق
گلدانی	$y=\lvert x-a\rvert+\lvert x-b\rvert$		ریشه‌های داخل قدرمطلق
هموگرافیک	$y=\frac{ax+b}{cx+d}$		ریشهٔ مخرج

درس‌نامه ۲. یکنوایی سهمی در بازهٔ $[k,+\infty)$ یا $(-\infty,k]$

	شرط صعودی اکیدبودن در بازهٔ $[k,+\infty)$	شرط نزولی اکیدبودن در بازهٔ $[k,+\infty)$	شرط صعودی اکیدبودن در بازهٔ $(-\infty,k]$	شرط نزولی اکیدبودن در بازهٔ $(-\infty,k]$
$a>0$	$x_s \le k$	غیرممکن	غیرممکن	$x_s \ge k$
$a<0$	غیرممکن	$x_s \le k$	$x_s \ge k$	غیرممکن

پاسخ تشریحی گام اول، در دو حالت $a>0$ و $a<0$، مسأله را بررسی می‌کنیم:

حالت (۱)، فرض کنیم $a>0$ باشد و بخواهیم سهمی در $[2,+\infty)$ اکیداً نزولی باشد:

با توجه به نمودار سهمی، این حالت غیرممکن است.

حالت (۲)، فرض کنیم $a<0$ باشد و بخواهیم سهمی در $[2,+\infty)$ اکیداً نزولی باشد:

باید x_s کوچک‌تر یا مساوی ۲ باشد: $x_s \le 2$

گام دوم، با توجه به ضابطهٔ سهمی $f(x)=(m-2)x^2+(m+1)x$، حالت دوم را اعمال می‌کنیم:

- $a<0 \Rightarrow m-2<0 \Rightarrow m<2 \qquad (1)$
- $x_s \le 2 \Rightarrow \frac{-b}{2a} \le 2 \Rightarrow \frac{-(m+1)}{2(m-2)} \le 2 \Rightarrow \frac{-m-1}{2m-4}-2 \le 0 \Rightarrow \frac{-m-1-4m+8}{2m-4} \le 0 \Rightarrow \frac{-5m+7}{2m-4} \le 0$

$\xrightarrow{\text{تابین ریشه‌ها}} m>2$ یا $m \le \frac{7}{5} \qquad (2)$

اشتراک دو شرط (۱) و (۲)، محدودهٔ $m \le \frac{7}{5}$ را به ما می‌دهد؛ پس حداکثر مقدار m برابر $\frac{7}{5}$ یا ۱/۴ است.

تست و پاسخ ۴۶

روی نمودار تابع $f(x)=\frac{1}{4}(\frac{1}{3^x}+1)$ به ترتیب چه تغییراتی انجام دهیم تا به نمودار تابع $g(x)=\frac{2^x+2^{2x}}{2^{x+2}}$ برسیم؟

۱) ۴ واحد انتقال به راست، قرینه نسبت به محور yها، انبساط عمودی با ضریب ۲

۲) قرینه نسبت به محور yها، انبساط افقی با ضریب ۲

۳) ۴ واحد انتقال به راست، قرینه نسبت به محور yها، انقباض عمودی با ضریب $\frac{1}{2}$

۴) قرینه نسبت به محور yها، انقباض افقی با ضریب $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره خواستان باشد در سؤالات این مدلی، طراح ممکن است ترتیب مراحل را به شکلی که عرف نیست، از شما بخواهد!

خودت حل کنی بهتره در تابع g، صورت و مخرج را به 2^x ساده کنید.

درس‌نامه ** انتقال، قرینه‌یابی، انبساط و انقباض

	نمودار چه می‌شود؟	نماد ریاضی	اتفاقی که برای ضابطه می‌افتد.
انتقال $(a,b>0)$	a واحد راست	$f(x-a)$	جای xها، $x-a$ می‌گذاریم.
	a واحد چپ	$f(x+a)$	جای xها، $x+a$ می‌گذاریم.
	b واحد بالا	$f(x)+b$	b واحد به ضابطه اضافه می‌شود.
	b واحد پایین	$f(x)-b$	b واحد از ضابطه کم می‌شود.
قرینه‌یابی	نسبت به محور xها	$-f(x)$	جای y، $-y$ می‌گذاریم.
	نسبت به محور yها	$f(-x)$	جای xها، $-x$ می‌گذاریم.
	نسبت به مبدأ	$-f(-x)$	هر دو کار بالا با هم!
	نسبت به خط $x=k$	$f(2k-x)$	جای xها، $2k-x$ می‌گذاریم.
	نسبت به خط $y=k$	$2k-f(x)$	جای y، $2k-y$ می‌گذاریم.
انبساط و انقباض افقی	انبساط با ضریب ۲	$f(\frac{x}{2})$	جای xها، $\frac{x}{2}$ می‌گذاریم.
	انقباض با ضریب $\frac{1}{2}$	$f(2x)$	جای xها، $2x$ می‌گذاریم.
انبساط و انقباض عمودی	انبساط با ضریب ۲	$2f(x)$	ضابطه را دو برابر می‌کنیم.
	انقباض با ضریب $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}f(x)$	ضابطه را نصف می‌کنیم.

پاسخ تشریحی گام اول، ضابطه هر دو تابع را ساده می‌کنیم:

- $f(x)=\frac{1}{4}(\frac{1}{4^x}+1)=\frac{1}{4}(2^{-2x}+1)=\frac{2^{-2x}+1}{4}$
- $g(x)=\frac{2^x+2^{2x}}{2^{x+2}}=\frac{2^x(1+2^x)}{2^x\times 2^2}=\frac{2^x+1}{4}$

گام دوم، ضابطهٔ f و g خیلی شبیه هم است. فقط باید $-2x$ (در توان) به x تبدیل شود؛ پس دو مرحله داریم:

$$\frac{2^{-2x}+1}{4}\xrightarrow[(x\to -x)]{(1)\text{ قرینه نسبت به محور } y\text{ها}}\frac{2^{2x}+1}{4}\xrightarrow[x\to\frac{x}{2}]{(2)\text{ انبساط افقی با ضریب ۲}}\frac{2^{2(\frac{x}{2})}+1}{4}=\frac{2^x+1}{4}$$

تذکر اگر جای این دو مرحله را هم عوض کنیم، باز هم درست است.

تست و پاسخ ۴۷

دو تابع $f(x)=\frac{2(x+2)}{x+a}$ و $g=\{(8,2),(5,b)\}$ را در نظر بگیرید. اگر دامنه و برد تابع دوعضوی fog با هم برابر باشند، حداقل مقدار $a+b$ کدام است؟

۱) ۰/۸ ۲) ۱/۲ ۳) ۱/۸ ۴) ۲

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره مقدار $f(g(x))$ را به ازای xهای عضو D_g حساب کنید.

پاسخ تشریحی گام اول، دامنهٔ تابع fog از تابع داخلی یعنی g گرفته می‌شود. مقدار $f(g(x))$ را به ازای $\underbrace{x=8 \text{ و } x=5}_{D_g}$ حساب می‌کنیم:

$$f(\underbrace{g(8)}_{2}) = f(2) = \frac{2(2+2)}{2+a} = \frac{8}{2+a} \qquad f(\underbrace{g(5)}_{b}) = f(b) = \frac{2(b+2)}{b+a} = \frac{2b+4}{b+a}$$

گام دوم، پس دامنه و برد fog به صورت مقابل‌اند:

$$D_{fog} = \{8, 5\}$$

$$R_{fog} = \{\frac{8}{2+a}, \frac{2b+4}{b+a}\}$$

تذکر چون D_{fog} دوعضوی است، پس مخرج کسرهایی که در R_{fog} داریم، نباید صفر باشد.

گام سوم، برای آن‌که D_{fog} و R_{fog} برابر باشند، دو حالت داریم:

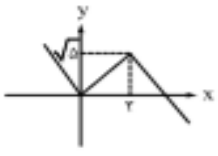
$$\text{حالت ۱:} \begin{cases} 8 = \frac{8}{2+a} \Rightarrow 2+a=1 \Rightarrow a=-1 \\ 5 = \frac{2b+4}{b+a} \xrightarrow{a=-1} 5 = \frac{2b+4}{b-1} \Rightarrow 5b-5 = 2b+4 \Rightarrow b=3 \end{cases} \Rightarrow a+b=2$$

$$\text{حالت ۲:} \begin{cases} 5 = \frac{8}{2+a} \Rightarrow 2+a = \frac{8}{5} \Rightarrow a=-0/4 \\ 8 = \frac{2b+4}{b+a} \xrightarrow{a=-0/2} 8 = \frac{2b+4}{b-0/4} \Rightarrow 8b-3/2 = 2b+4 \Rightarrow b = \frac{7/2}{6} = 1/2 \end{cases} \Rightarrow a+b=0/8$$

پس حداقل مقدار $a+b$ برابر با $0/8$ است.

تست و پاسخ ۴۸

اگر $f(x) = \begin{cases} -x & x>0 \\ x^2 & x \le 0 \end{cases}$ و نمودار تابع g مطابق شکل باشد، معادلهٔ $(gof)(x) = 2$ چند جواب دارد؟



۱) ۱ ۲) ۲

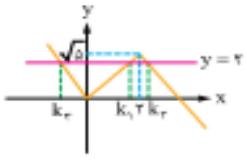
۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره خیلی جاها مثل همین سؤال نباید درگیر به دست‌آوردن ریشه‌های معادله شوید. فقط تعداد از شما خواسته شده است.

خودت حل کنی بهتره نمودار f را بکشید. بعد روی آن دنبال xهایی باشید که به ازای آن‌ها، خروجی تابع g برابر ۲ می‌شود.

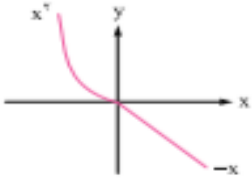
پاسخ تشریحی گام اول، روی شکل نقاطی که به ازای آن‌ها، خروجی g برابر ۲ می‌شود را مشخص می‌کنیم:

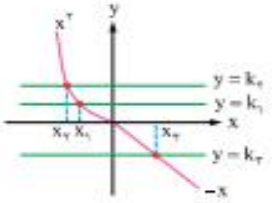


دقت کنید که $\sqrt{5} \simeq 2/2$.

گام دوم، از آن‌جایی که $g(k_1) = g(k_2) = g(k_3) = 2$ است، پس جواب معادلهٔ $g(f(x)) = 2$، معادل با جواب معادله‌های $f(x) = \underset{-2<k_1<2}{k_1}$، $f(x) = \underset{k_2>2}{k_2}$ و $f(x) = \underset{k_3<0}{k_3}$ است.

گام سوم، نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} -x & x>0 \\ x^2 & x \le 0 \end{cases}$ را رسم می‌کنیم:





گام چهارم: باید ببینیم سه خط افقی $y=k_1$ ، $y=k_2$ و $y=k_3$ ، نمودار f را در چند نقطه قطع می‌کنند.

$k_3<0$ ، $k_2>2$ ، $0<k_1<2$

پس معادله، ۳ جواب دارد. (x_3, x_2, x_1)

تست و پاسخ ۴۹

اگر $f(x)=[x]-x$ و $g(x)=\cos\frac{3\pi}{4}x$ باشد، آن‌گاه برد تابع gof به صورت $[a,b]-\{c\}$ است. حاصل $a^2+b^2+c^2$ کدام است؟ ([ ] نماد جزء صحیح است.)

۱) ۱/۵ ۲) ۲ ۳) ۲/۵ ۴) ۳

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره برد fog در کنکور ۹۹ سؤال شده بود. حتماً تکنیک حل مسائلش را بلد باشید.

خوبت حل کنی بهتره اول R_f را به دست بیاورید. بعد برد g را با دامنهٔ R_f حساب کنید.

درس‌نامه محاسبهٔ برد fog

برای به دست آوردن برد تابع fog، دو مرحلهٔ زیر را انجام می‌دهیم:

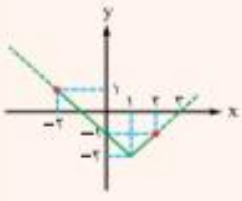
مرحلهٔ اول: برد تابع g را حساب می‌کنیم (مثلاً می‌شود بازهٔ I).

مرحلهٔ دوم: برد تابع f با دامنهٔ I را حساب می‌کنیم.

مثال: اگر $f(x)=|x-1|-2$ و $g(x)=2\sin x$ باشد، آن‌گاه:

مرحلهٔ اول: برد g را حساب می‌کنیم: $-1\le \sin x\le 1 \Rightarrow -2\le 2\sin x\le 2 \Rightarrow R_g=[-2,2]$

مرحلهٔ دوم: برد f با دامنهٔ $[-2,2]$ را حساب می‌کنیم. برای رسم f باید نمودار $y=|x|$ را ۱ واحد به راست و ۲ واحد به پایین ببریم.



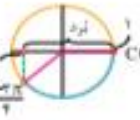
$\xrightarrow{\text{برد قسمت رنگی}} R_{fog}=[-2,1]$

نکته $0\le u-[u]<1$

پاسخ تشریحی گام اول: برد تابع داخلی یعنی $f(x)=[x]-x$ را حساب می‌کنیم:

$\underbrace{0\le x-[x]<1}_{\text{طبق نکته}} \xrightarrow{\text{قرینه}} -1<[x]-x\le 0 \Rightarrow R_f=(-1,0]$

گام دوم: برد تابع بیرونی یعنی $g(x)=\cos\frac{3\pi}{4}x$ را با دامنهٔ $(-1,0]$ حساب می‌کنیم:

$-1<x\le 0 \xrightarrow{\times\frac{3\pi}{4}} \frac{-3\pi}{4}<\frac{3\pi}{4}x\le 0 \xrightarrow{\text{کمک گرفتن از دایره}}$  $\Rightarrow \frac{-\sqrt{2}}{2}<\cos\frac{3\pi}{4}x\le 1 \Rightarrow R_g=(\frac{-\sqrt{2}}{2},1]$

گام سوم: بازهٔ $(\frac{-\sqrt{2}}{2},1]$ را می‌توانیم به شکل $[\underbrace{\frac{-\sqrt{2}}{2}}_{a},\underbrace{1}_{b}]-\{\underbrace{\frac{-\sqrt{2}}{2}}_{c}\}$ بنویسیم، پس: $a^2+b^2+c^2=(\frac{-\sqrt{2}}{2})^2+1^2+(\frac{-\sqrt{2}}{2})^2=2$

تست و پاسخ ۵۰

تابع ثابت $f(x)=(a-2)x+2a$ و تابع $g=\{(0,1),(2,-2),(4,2)\}$ را در نظر بگیرید. حاصل $(gof)(0)$ کدام است؟

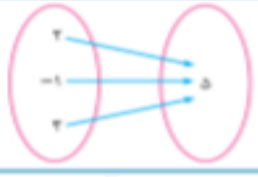
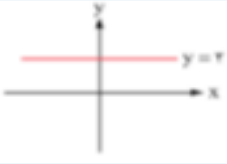
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -2 ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره در ضابطهٔ تابع ثابت، ضریب x برابر صفر است.

درس‌نامه تابع ثابت

- تعریف: تابعی را که برد آن فقط یک عضو دارد، تابع ثابت می‌نامیم.
- نمایش‌های مختلف تابع ثابت:

نمایش تابع	ویژگی در تابع ثابت	مثال
زوج مرتبی	مؤلفهٔ دوم تمام زوج‌های مرتب یکسان است.	$\{(1,4),(2,4),(-7,4)\}$
پیکانی	تمام پیکان‌ها به یک عدد وارد می‌شود.	
نموداری	روی یک خط افقی قرار دارد.	
ضابطه‌ای	$f(x)=c$	$f(x)=\frac{-5}{4}$ یا $f(x)=3$

نکته در نمایش ضابطه‌ای تابع ثابت، ضریب x، x^2 و ... باید صفر باشد.

پاسخ تشریحی **گام اول:** تابع $f(x)=(a-2)x+2a$ ثابت است، پس ضریب x آن باید صفر باشد: $a-2=0 \Rightarrow a=2$

با جای‌گذاری $a=2$، ضابطهٔ f به صورت $f(x)=4$ می‌شود.

گام دوم: $(gof)(0)$ یعنی $g(f(0))$ که در دو مرحله محاسبه می‌شود: $g(\underbrace{f(0)}_{\text{مرحلهٔ ۱}})$ مرحلهٔ ۲

گام سوم: مقدار تابع f در هر نقطه‌ای برابر با ۴ است، پس $f(0)=4$.

گام چهارم: با توجه به زوج مرتب $(4,2)$ در تابع g، مقدار $g(4)$ می‌شود ۲: $g(\underbrace{f(0)}_{4})=g(4)=2$

تست و پاسخ ۵۱

در کدام گزینه دو تابع f و g مساوی نیستند؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $f(x)=\sqrt{[x]-x}+1$ ، $g(x)=\frac{1}{[x]+[-x]+1}$

۲) $f(x)=2\log|x|$ ، $g(x)=\log x^2$

۳) $f(x)=(x+|x|)\sqrt{\frac{1}{x}-1}$ ، $g(x)=2\sqrt{x-x^2}$

۴) $f(x)=|x|\sqrt{1-x^2}$ ، $g(x)=\sqrt{x^2-x^4}$

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره در سوالات تساوی توابع، اول سراغ دامنه‌ها بروید. اگر برابر بودند، ضابطه‌ها را چک کنید.

خودت حل کنی بهتره به ازای $x=0$، توابع هر چهار گزینه را چک کنید.

درس‌نامه تساوی توابع

شروط تساوی دو تابع f و g:

۱	$D_f = D_g$ (دامنه‌ها قبل از ساده‌کردن باید محاسبه شوند.)
۲	ضابطه‌های دو تابع را بتوانیم با کارهای جبری و ... مثل هم کنیم.

نکات (۱) $\log x^n = \begin{cases} n\log x & n \text{ فرد} \\ n\log|x| & n \text{ زوج} \end{cases}$ (۲) $[x]+[-x] = \begin{cases} 0 & x\in\mathbb{Z} \\ -1 & x\notin\mathbb{Z} \end{cases}$

پاسخ تشریحی هر گزینه را در یک گام بررسی می‌کنیم:

گام اول: اول دامنه‌ها:

$$f(x)=\sqrt{[x]-x}+1 \xrightarrow{\text{دامنه}} \text{زیر رادیکال} \geq 0 \Rightarrow [x]-x\geq 0 \Rightarrow [x]\geq x \Rightarrow x\in\mathbb{Z}$$

$$g(x)=\frac{1}{[x]+[-x]+1} \xrightarrow{\text{دامنه}} \text{مخرج} \neq 0 \Rightarrow [x]+[-x]+1\neq 0 \Rightarrow \underbrace{[x]+[-x]}_{\text{وقتی } x\notin\mathbb{Z} \text{، حاصلش ۱- می‌شود.}} \neq -1 \xrightarrow{\text{نکته ۲}} x\in\mathbb{Z}$$

حالا با توجه به دامنه‌ها، ضابطه‌ها را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{[x]-x}+1 \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} f(x)=\sqrt{x-x}+1=1$$

$$g(x)=\frac{1}{[x]+[-x]+1} \xrightarrow{x\in\mathbb{Z}} g(x)=\frac{1}{x+(-x)+1}=1$$

دامنه‌ها و ضابطه‌ها برابرند، پس $f=g$.

گام دوم: اول دامنه‌ها:

$$f(x)=\log x^2 \xrightarrow{\text{دامنه}} \text{جلوی لگاریتم} > 0 \Rightarrow x^2>0 \Rightarrow x\in\mathbb{R}-\{0\}$$

$$g(x)=2\log|x| \xrightarrow{\text{دامنه}} \text{جلوی لگاریتم} > 0 \Rightarrow |x|>0 \Rightarrow x\in\mathbb{R}-\{0\}$$

از طرفی ضابطه‌ها هم طبق نکتهٔ ۱ با هم برابرند.

چون دامنه‌ها و ضابطه‌ها برابرند، پس $f=g$.

گام سوم: اول دامنه‌ها:

$$f(x)=(x+|x|)\sqrt{\frac{1}{x}-1} \xrightarrow{\text{دامنه}} \text{زیر رادیکال} \geq 0 \Rightarrow \frac{1}{x}-1\geq 0 \Rightarrow \frac{1-x}{x}\geq 0 \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} 0<x\leq 1$$

$$g(x)=2\sqrt{x-x^2} \xrightarrow{\text{دامنه}} \text{زیر رادیکال} \geq 0 \Rightarrow x-x^2\geq 0 \Rightarrow x(1-x)\geq 0 \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} 0\leq x\leq 1$$

چون دامنه‌ها برابر نیست، پس لازم نیست شرط ۲ را چک کنیم و $f\neq g$.

گام چهارم: اول دامنه‌ها:

$$f(x)=|x|\sqrt{1-x^2} \xrightarrow{\text{دامنه}} \text{زیر رادیکال} \geq 0 \Rightarrow 1-x^2\geq 0 \Rightarrow x^2\leq 1 \Rightarrow -1\leq x\leq 1$$

$$g(x)=\sqrt{x^2-x^4} \xrightarrow{\text{دامنه}} \text{زیر رادیکال} \geq 0 \Rightarrow x^2(1-x^2)\geq 0 \Rightarrow -1\leq x\leq 1$$

ضابطهٔ g را ساده می‌کنیم:

$$g(x)=\sqrt{x^2-x^4}=\sqrt{x^2(1-x^2)}=|x|\sqrt{1-x^2}=f(x)$$

چون دامنه‌ها و ضابطه‌ها برابرند، پس $f=g$.

تست و پاسخ ۵۲

اگر $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}-1$ و $g(x)=3-\frac{1}{\sqrt{x}}$، نمودار تابع $f+g$ از چند ناحیهٔ دستگاه مختصات عبور می‌کند؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره در تشکیل ضابطهٔ توابع $f \overset{+}{\underset{\div}{\times}} g$، اگر ضابطه‌ها ساده شوند و به ضابطهٔ جمع و جوری رسیدیم، حواستان به دامنه باشد.

خودت حل کنی بهتره مخرج کسر $\frac{1}{\sqrt{x}}$ را گویا کنید و بعد دو تابع را جمع کنید.

درس‌نامه ۴ عمل اصلی روی توابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

اسم عمل	نماد	تعریف ریاضی	دامنه
جمع دو تابع	$f+g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$D_f \cap D_g$
تفریق دو تابع	$f-g$	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	$D_f \cap D_g$
ضرب دو تابع	fg	$(fg)(x)=f(x).g(x)$	$D_f \cap D_g$
تقسیم دو تابع	$\frac{f}{g}$	$(\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$D_f \cap D_g-\{x \mid g(x)=0\}$

پاسخ تشریحی **گام اول**، دامنهٔ توابع f و g را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x}}{x}-1 \xrightarrow{\text{دامنه}} \begin{cases} \text{زیر رادیکال} \geq 0 \Rightarrow x \geq 0 \\ \text{مخرج} \neq 0 \Rightarrow x \neq 0 \end{cases} \xrightarrow{\cap} D_f=(0,+\infty)$$

$$g(x)=3-\frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{\text{دامنه}} \text{زیر رادیکال} > 0 \Rightarrow x>0 \Rightarrow D_g=(0,+\infty)$$

گام دوم، دامنهٔ تابع $f+g$ را به دست می‌آوریم:

$$D_{f+g}=D_f \cap D_g=(0,+\infty)$$

گام سوم، ضابطهٔ $f+g$ را تشکیل می‌دهیم:

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(\cancel{\frac{\sqrt{x}}{x}}-1)+(3-\cancel{\frac{1}{\sqrt{x}}})=2$$

تذکر اگر صورت و مخرج $\frac{1}{\sqrt{x}}$ را در $\sqrt{x}$ ضرب کنیم به $\frac{\sqrt{x}}{x}$ می‌رسیم، پس $\frac{1}{\sqrt{x}}$ و $\frac{\sqrt{x}}{x}$ برابرند.

گام چهارم، پس باید تابع $y=2$ با دامنهٔ $(0,+\infty)$ را رسم کنیم:

نمودارمان فقط از ناحیهٔ اول می‌گذرد.

تست و پاسخ ۵۳

$g(f(x)) = 3x$

اگر $x \to \boxed{f} \to \boxed{g} \to 3x$ و $g(x) = 2x + 4$، آن‌گاه حاصل $f^{-1}(7)$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۱/۵ ۳) ۴/۵ ۴) $\frac{11}{3}$

پاسخ: گزینه ۱

مشاوره در فرم ماشینی تابع $f(g(x))$، ابتدا x وارد g و سپس $g(x)$ وارد f می‌شود.

خودت حل کنی بهتره اگر $g(x) = 2x + 4$ باشد، آن‌گاه $g(f(x)) = 2f(x) + 4$

درس‌نامه وقتی از بین f، g و fog، ۲ تا را داریم و سومی را می‌خواهیم.

f	g	fog	راه حل
✓	✓	؟	باید $f(g(x))$ را تشکیل دهیم.
✓	؟	✓	در ضابطهٔ f، جای xهایش $g(x)$ قرار می‌دهیم. عبارت به دست آمده را با fog داده‌شده برابر قرار می‌دهیم.
؟	✓	✓	$g(x)$ را مساوی t قرار می‌دهیم. x را برحسب t حساب می‌کنیم و ...

نکات ۱) دستگاه $a \to f \to g \to b$ را می‌توانیم به صورت $g(f(a)) = b$ بنویسیم.

a وارد f می‌شه — f(a) وارد g می‌شه — حاصل مرحلهٔ قبل می‌شود b

و به f(a) می‌رسیم — و به g(f(a)) می‌رسیم

۲) برای محاسبهٔ $f^{-1}(k)$، بهترین راه این است که معادلهٔ $f(x) = k$ را حل کنیم. جواب این معادله، همان $f^{-1}(k)$ می‌شود. مثلاً اگر $f(x) = x + \sqrt{x}$ باشد و ما $f^{-1}(12)$ را بخواهیم، معادلهٔ $x + \sqrt{x} = 12$ را حل می‌کنیم که جوابش می‌شود ۹.

پاسخ تشریحی **گام اول**: دستگاه $x \to f \to g \to 3x$ را به صورت $g(f(x)) = 3x$ می‌نویسیم.

گام دوم: در ضابطهٔ $g(x) = 2x + 4$، جای xها، $f(x)$ قرار می‌دهیم: $g(f(x)) = 2f(x) + 4$

گام سوم: عبارات به دست آمده از گام اول و دوم را برابر قرار می‌دهیم: $3x = 2f(x) + 4 \xrightarrow{\div 2} f(x) = \frac{3}{2}x - 2$

گام چهارم: برای به دست آوردن $f^{-1}(7)$، کافی است معادلهٔ $f(x) = 7$ را حل کنیم: $\frac{3}{2}x - 2 = 7 \Rightarrow \frac{3}{2}x = 9 \Rightarrow x = 6$

پس: $f^{-1}(7) = 6$.

تست و پاسخ ۵۴

اگر $f(2x - 1) = x^2 + x$، کم‌ترین مقدار تابع $y = f(2 - 3x)$ کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) $-\frac{1}{4}$ ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینه ۲

مشاوره در تبدیل $f(ax + b)$ به $f(a'x + b')$، برد تابع تغییری نمی‌کند.

خودت حل کنی بهتره در تابع درجه‌دوم با توجه به علامت a، کم‌ترین (یا بیشترین) مقدار برابر با $\frac{-\Delta}{4a}$ یا $f(\frac{-b}{2a})$ است.

درس‌نامه ◄◄ وقتی از بین f، g و fog، ۲تا را داریم و سومی را می‌خواهیم.

f	g	fog	راه حل
✓	✓	؟	باید $f(g(x))$ را تشکیل دهیم.
✓	؟	✓	در ضابطهٔ f، جای xهایش $g(x)$ قرار می‌دهیم. عبارت به دست آمده را با fog داده‌شده برابر قرار می‌دهیم.
؟	✓	✓	$g(x)$ را مساوی t قرار دهیم. x را برحسب t حساب می‌کنیم و ...

پاسخ تشریحی **راه اول، گام اول:** در تساوی $f(2x-1)=x^2+x$، عبارت داخل پرانتز را t می‌گیریم و x را برحسب t به دست می‌آوریم:

$$2x-1=t \Rightarrow x=\frac{t+1}{2}$$

گام دوم: در تساوی $f(2x-1)=x^2+x$، جای xها، $\frac{t+1}{2}$ قرار می‌دهیم:

$$f(t)=(\frac{t+1}{2})^2+(\frac{t+1}{2})=\frac{t^2+2t+1}{4}+\frac{t+1}{2} \Rightarrow f(t)=\frac{1}{4}t^2+t+\frac{3}{4}$$

گام سوم: برای به دست آوردن ضابطهٔ $f(2-3x)$، در تساوی بالا جای t، $2-3x$ قرار می‌دهیم:

$$f(t)=\frac{1}{4}t^2+t+\frac{3}{4} \xrightarrow{t=2-3x} f(2-3x)=\frac{1}{4}(2-3x)^2+(2-3x)+\frac{3}{4}=1-3x+\frac{9}{4}x^2+2-3x+\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow f(2-3x)=\frac{9}{4}x^2-6x+\frac{15}{4}$$

گام چهارم: در عبارت درجه‌دوم اگر ضریب x^2 مثبت باشد، کم‌ترین مقدار عبارت از رابطهٔ $\frac{-\Delta}{4a}$ به دست می‌آید، پس min عبارت گام سوم برابر است با:

$$\min=\frac{-\Delta}{4a}=\frac{-(36-4(\frac{9}{4})(\frac{15}{4}))}{4(\frac{9}{4})}=\frac{-(36-\frac{135}{4})}{9}=\frac{\frac{-9}{4}}{9}=\frac{-1}{4}$$

راه دوم، گام اول: برای تبدیل $f(ax+b)$ به $f(a'x+b')$، برد تابع تغییری نمی‌کند.

پس مینیمم $f(ax+b)$ و $f(a'x+b')$ یکسان است.

گام دوم: کم‌ترین مقدار $y=x^2+x$ را حساب می‌کنیم:

$$y=x^2+x \Rightarrow y_{min}=-\frac{\Delta}{4a}=-\frac{1^2-0}{4(1)}=\frac{-1}{4}$$

تست و پاسخ ۵۵

اگر $f(x)=\frac{b}{x+a}$ و دامنهٔ تابع fof، مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{2,1\}$ باشد، حداکثر مقدار a.b کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۴

خودت حل کنی بهتره $f(f(x))$ را تشکیل دهید. در آن دو تا کسر می‌بینید. ریشه‌های مخرج این دو کسر باید ۱ و ۲ باشند.

درس‌نامه ◄◄ دامنهٔ fog

برای محاسبهٔ دامنهٔ fog دوتا کار می‌توانیم انجام دهیم:

راه اول	$D_{fog}=\{\underbrace{x\in D_g}_{\text{شرط ۱}} \cap \underbrace{g(x)\in D_f}_{\text{شرط ۲}}\}$
راه دوم	ضابطهٔ fog را بدون هیچ ساده‌کردنی تشکیل می‌دهیم و سپس دامنهٔ آن را حساب می‌کنیم.

پاسخ تشریحی **گام اول:** با داشتن $f(x)=\frac{b}{x+a}$، تابع fof را تشکیل می‌دهیم. باید جای xهای f(x)، خود f(x) را قرار دهیم:

$$f(f(x))=\frac{b}{f(x)+a}=\frac{b}{\frac{b}{x+a}+a}$$

گام دوم: دامنهٔ تابع بالا دوتا شرط دارد:

$$\frac{b}{\frac{b}{x+a}+a}$$

(۲) صفر نباشد. (۱) صفر نباشد.

$$(1)\ x+a=0 \Rightarrow x=-a$$

$$(2)\ \frac{b}{x+a}+a=0 \Rightarrow \frac{b}{x+a}=-a \Rightarrow x+a=\frac{b}{-a} \Rightarrow x=-a-\frac{b}{a}$$

گام سوم: پس دو عدد $-a$ و $-a-\frac{b}{a}$ در دامنهٔ fof نیستند. با توجه به دامنهٔ fof که به صورت $\mathbb{R}-\{1,2\}$ است، پس اعداد ۱ و ۲ همان اعداد $-a$ و $-a-\frac{b}{a}$ هستند. دو حالت داریم:

حالت ۱) $-a$ و $-a-\frac{b}{a}$ به ترتیب ۱ و ۲ باشند:

$$\left.\begin{array}{l}-a=1 \Rightarrow a=-1\\ -a-\frac{b}{a}=2 \xrightarrow{a=-1} 1+b=2 \Rightarrow b=1\end{array}\right\} \Rightarrow ab=-1$$

حالت ۲) $-a$ و $-a-\frac{b}{a}$ به ترتیب ۲ و ۱ باشند:

$$\left.\begin{array}{l}-a=2 \Rightarrow a=-2\\ -a-\frac{b}{a}=1 \xrightarrow{a=-2} 2+\frac{b}{2}=1 \Rightarrow b=-2\end{array}\right\} \Rightarrow ab=4$$

پس بیشترین مقدار ab برابر با ۴ است.

تست و پاسخ ۵۶

اگر $f(x)=\frac{1}{2}(5+\frac{1}{2}\cos x)$ و $g(x)=x-[x]$، آن‌گاه برد تابع gof کدام است؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

۱) $[0,1)$ ۲) $(-1,0]$ ۳) $[0/25,0/75]$ ۴) $[0,0/5)$

پاسخ: گزینه ۳

مشاوره برد fog در کنکور ۹۹ سؤال شده بود. حتماً تکنیک حل مسائلش را بلد باشید. نمودار سه تابع $y=x-[x]$، $y=x+[x]$ و $y=[x]+[-x]$ را حتماً بلد باشید.

خودت حل کنی بهتره اول D_f را حساب کنید، بعد برد g را با دامنهٔ R_f حساب کنید.

درس‌نامه محاسبهٔ برد fog

برای به دست آوردن برد تابع fog، دو مرحلهٔ زیر را انجام می‌دهیم:

مرحلهٔ ۱: برد تابع g را حساب می‌کنیم (مثلاً می‌شود بازهٔ I)

مرحلهٔ ۲: برد تابع f با دامنهٔ I را حساب می‌کنیم.

مثال: اگر $f(x)=|x-1|-2$ و $g(x)=2\sin x$ باشد، آن‌گاه:

مرحلهٔ ۱: برد g را حساب می‌کنیم:

$$-1\le \sin x\le 1 \Rightarrow -2\le 2\sin x\le 2 \Rightarrow R_g=[-2,2]$$

مرحلهٔ ۲: برد f با دامنهٔ $[-2,2]$ را حساب می‌کنیم:

$$\xrightarrow{\text{برد قسمت رنگی}} R_{fog}=[-2,1]$$

تست و پاسخ ۵۷

تابع $f(x)=\sqrt{9x^2-12x+4}+\sqrt{x^2+2x+1}+mx+m^2$ در بازهٔ $(-1,\frac{1}{2})$، هم صعودی است و هم نزولی. در بازه‌ای که f اکیداً نزولی است، سهمی $y=x^2-3$ را با چه طولی قطع می‌کند؟

۱) ۲ ۲) ۴− ۳) ۵− ۴) ۲−

پاسخ: گزینه ۲

خودت حل کنی بهتره تابعی که هم صعودی باشد و هم نزولی، تابع ثابت است.

پاسخ تشریحی **گام اول:** ضابطهٔ f را ساده می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{\underbrace{9x^2-12x+4}_{(3x-2)^2}}+\sqrt{\underbrace{x^2+2x+1}_{(x+1)^2}}+mx+m^2=|3x-2|+|x+1|+mx+m^2$$

گام دوم: به ازای $-1<x<\frac{1}{2}$، داخل قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم و f را بدون قدرمطلق می‌نویسیم:

$$f(x)=|\underbrace{3x-2}_{\text{منفی}}|+|\underbrace{x+1}_{\text{مثبت}}|+mx+m^2=-3x+2+x+1+mx+m^2=(m-2)x+m^2+3$$

گام سوم: تابعی که هم صعودی و هم نزولی است، تابع ثابت است. باید ضریب x در f را صفر کنیم:

$$m-2=0 \Rightarrow m=2$$

پس:

$$f(x)=|3x-2|+|x+1|+2x+4$$

f را سه‌ضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$x<-1: -3x+2-x-1+2x+4=-2x+5$$

$$-1\le x\le\frac{2}{3}: -3x+2+x+1+2x+4=7$$

$$x>\frac{2}{3}: 3x-2+x+1+2x+4=6x+3$$

پس f در بازهٔ $x<-1$ اکیداً نزولی است.

گام چهارم: ضابطهٔ $y=-2x+5$ را با سهمی $y=x^2-3$ قطع می‌دهیم:

$$x^2-3=-2x+5 \Rightarrow x^2+2x-8=0 \Rightarrow (x+4)(x-2)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=-4 & \checkmark \\ x=2 & \times \end{cases}$$

(در محدودهٔ $x<-1$ نیست.)

تست و پاسخ ۵۸

تابع همانی f را در نظر گرفته، نمودار تابع $\frac{1}{\sqrt{f}}$ را در امتداد محور xها، a واحد در جهت مثبت انتقال می‌دهیم و تابع حاصل را g می‌نامیم. سپس نمودار g را ۳ واحد به پایین انتقال می‌دهیم، اگر منحنی حاصل، نمودار f را در $x=1$ قطع کند، حاصل $g(\frac{6}{5}a)$ کدام است؟

۱) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ۲) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) $\frac{4}{\sqrt{3}}$

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی **گام اول:** ضابطهٔ f به صورت $f(x)=x$ است.

ضابطهٔ تابع $\frac{1}{\sqrt{f}}$ به صورت $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ است.

گام دوم: نمودار $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ را a واحد به راست می‌بریم، پس جای xهایش $x-a$ قرار می‌دهیم:

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{x-a}}$$

گام سوم: g را ۳ واحد به پایین می‌بریم:

$$y=\frac{1}{\sqrt{x-a}}-3$$

گام چهارم: توابع $f(x)=x$ و $y=\frac{1}{\sqrt{x-a}}-3$ در $x=1$ متقاطع‌اند، پس:

$$x=\frac{1}{\sqrt{x-a}}-3 \xrightarrow{x=1} 1=\frac{1}{\sqrt{1-a}}-3 \Rightarrow 4=\frac{1}{\sqrt{1-a}} \Rightarrow \sqrt{1-a}=\frac{1}{4} \Rightarrow 1-a=\frac{1}{16} \Rightarrow a=\frac{15}{16}$$

گام پنجم: ضابطهٔ g به صورت $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x-\frac{15}{16}}}$ است. مقدار $g(\frac{6}{5}a)$ برابر است با:

$$g(\frac{\cancel{6}^{3}}{\cancel{5}_{1}}\times\frac{\cancel{15}^{3}}{\cancel{16}_{8}})=g(\frac{9}{8})=\frac{1}{\sqrt{\frac{9}{8}-\frac{15}{16}}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{3}{16}}}=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{4}}=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

تست و پاسخ ۵۹

اگر $f(x)=x+6$ و $(gof^{-1})^{-1}(x)=3x-2$، آن‌گاه $g(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) $\frac{1}{3}(x-8)$ ۲) $\frac{1}{3}(x+8)$ ۳) $\frac{1}{3}(x+2)$ ۴) $\frac{1}{3}(x-2)$

پاسخ: گزینه ۲

نکته $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$

پاسخ تشریحی **گام اول:** به کمک نکتهٔ بالا، تساوی داده‌شده را ساده می‌کنیم:

$$(gof^{-1})^{-1}(x)=3x-2\xrightarrow{\text{نکته}}(fog^{-1})(x)=3x-2\Rightarrow f(g^{-1}(x))=3x-2$$

گام دوم: می‌دانیم $f(x)=x+6$، پس $f(\square)=\square+6$ و داریم:

$$f(\underbrace{g^{-1}(x)}_{\text{در نقش ابر!}})=g^{-1}(x)+6$$

بنابراین $3x-2$ و $g^{-1}(x)+6$ برابرند:

$$g^{-1}(x)+6=3x-2\Rightarrow g^{-1}(x)=3x-8$$

گام سوم: وارون تابع خطی $y=3x-8$، ضابطهٔ g را می‌دهد:

$$y=3x-8\xrightarrow{\text{تنها کردن } x}x=\frac{y+8}{3}\xrightarrow[y \text{ و } x]{\text{عوض کردن}}y=\frac{x+8}{3}$$

پس:

$$g(x)=\frac{1}{3}(x+8)$$

تست و پاسخ ۶۰

اگر f تابع همانی باشد و $f(a+f(a))=a^2-8$، آن‌گاه اختلاف مقادیر قابل قبول برای a کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۳

خودت حل کنی بهتره جای $f(\square)$ها، $\square$ قرار دهید.

پاسخ تشریحی **گام اول:** چون f همانی است، پس جای $f(\square)$ها، $\square$ قرار می‌دهیم؛ در نتیجه:

$$f(a+\underbrace{f(a)}_{a})=a^2-8\Rightarrow\underbrace{f(2a)}_{2a}=a^2-8\Rightarrow a^2-2a-8=0\Rightarrow(a-4)(a+2)=0\Rightarrow\begin{cases}a=4\\a=-2\end{cases}$$

گام دوم: اختلاف مقادیر قابل قبول برای a برابر است با:

$$4-(-2)=6$$

تست و پاسخ ۶۱

نمودار تابع $f(x)=(2x-1)^3$ را ۲ واحد به چپ و ۱ واحد به بالا می‌بریم، سپس نمودار حاصل را با ضریب ۲ در راستای محور افقی منقبض کرده و نسبت به مبدأ مختصات قرینه می‌کنیم تا نمودار g حاصل شود. حاصل $g(1)$ کدام است؟

نسبت به محور xها و نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم.

۱) ۲۸ ۲) ۲۶−

۳) ۲ ۴) صفر

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ تشریحی **گام اول:** برای آن‌که f را ۲ واحد به چپ ببریم باید جای xهایش، $x+2$ قرار دهیم:

$$f(x)=(2x-1)^3 \xrightarrow{x\to x+2} y=(2(x+2)-1)^3=(2x+3)^3$$

گام دوم: حالا یک واحد به ضابطه اضافه می‌کنیم تا نمودارمان ۱ واحد به بالا برود:

$$y=(2x+3)^3+1$$

گام سوم: برای آن‌که نمودار را در راستای افقی با ضریب ۲ منقبض کنیم باید جای xها، $2x$ قرار دهیم:

$$y=(2x+3)^3+1 \xrightarrow{x\to 2x} y=(2(2x)+3)^3+1=(4x+3)^3+1$$

گام چهارم: برای قرینه‌کردن نسبت به مبدأ، جای x، $-x$ و جای y، $-y$ قرار می‌دهیم:

$$y=(4x+3)^3+1 \xrightarrow[y\to -y]{x\to -x} -y=(4(-x)+3)^3+1 \Rightarrow -y=(-4x+3)^3+1 \Rightarrow y=(4x-3)^3-1$$

$$\Rightarrow g(x)=(4x-3)^3-1$$

گام پنجم: $x=1$ را در g قرار می‌دهیم:

$$g(1)=(4-3)^3-1=0$$

تست و پاسخ ۶۲

اگر $f(x)=x^3-3x^2+3x+a$، به طوری که $(f+f^{-1})(-1)=-8$، آن‌گاه مجموع مقادیر قابل قبول برای a کدام است؟

۱) ۶− ۲) ۵− ۳) ۴− ۴) ۳−

پاسخ: گزینه ۱

خودت حل کنی بهتره $(x-1)^3=x^3-3x^2+3x-1$

پاسخ تشریحی **گام اول:** به کمک اتحاد $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$، ضابطهٔ f را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + a = \underbrace{x^3 - 3x^2 + 3x - 1}_{(x-1)^3} + 1 + a = (x-1)^3 + a + 1$$

گام دوم: تساوی $(f + f^{-1})(-1) = -8$ معادل است با: $f(-1) + f^{-1}(-1) = -8$

- برای محاسبهٔ $f(-1)$، جای xها، -1 قرار می‌دهیم: $f(-1) = (-1-1)^3 + a + 1 = -8 + a + 1 = a - 7$

- برای محاسبهٔ $f^{-1}(-1)$، جای $\underbrace{y}_{f(x)}$، -1 قرار می‌دهیم:

$$-1 = (x-1)^3 + a + 1 \Rightarrow (x-1)^3 = -a - 2 \xrightarrow{\text{ریشهٔ ۳}} x - 1 = \sqrt[3]{-a-2} \Rightarrow x = 1 + \sqrt[3]{-a-2} = 1 - \sqrt[3]{a+2}$$

گام سوم: با جای‌گذاری دو مقدار به دست آمده در $f(-1) + f^{-1}(-1) = -8$، داریم:

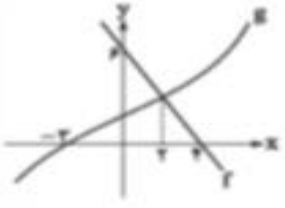
$$(a-7) + (1 - \sqrt[3]{a+2}) = -8 \Rightarrow a + 2 = \sqrt[3]{a+2} \xrightarrow{t = \sqrt[3]{a+2}} t^3 = t$$

$$\Rightarrow t^3 - t = 0 \Rightarrow t(t^2 - 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{a+2} = 0 \Rightarrow a = -2 \\ t = 1 \Rightarrow \sqrt[3]{a+2} = 1 \Rightarrow a = -1 \\ t = -1 \Rightarrow \sqrt[3]{a+2} = -1 \Rightarrow a = -3 \end{cases}$$

گام چهارم: مجموع مقادیر a برابر است با: $-2 + (-1) + (-3) = -6$

تست و پاسخ ۶۳

نمودار تابع خطی f و تابع g در یک دستگاه مختصات رسم شده است. حاصل $(f^{-1}og)(2) + (gof^{-1})(3)$ کدام است؟



۱) ۲

۲) ۳

۳) ۵

۴) ۷

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ تشریحی **گام اول:** ضابطهٔ تابع خطی f را می‌نویسیم:

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} + \frac{y}{6} = 1 \xrightarrow{\times 6} y = \frac{-3}{2}x + 6$$

طول از مبدأ — عرض از مبدأ

پس: $f(x) = \frac{-3}{2}x + 6$

گام دوم: f و g در $x = 2$ متقاطع‌اند، پس $g(2)$ با $f(2)$ برابر است؛ در نتیجه: $f^{-1}(\underbrace{g(2)}_{f(2)}) = f^{-1}(f(2)) = 2$

تذکر توابع fof^{-1} و $f^{-1}of$ همانی هستند.

گام سوم: برای محاسبهٔ $g(f^{-1}(3))$ دو مرحله داریم:

۱) محاسبهٔ $f^{-1}(3)$: باید جای $f(x)$، ۳ قرار دهیم: $3 = \frac{-3}{2}x + 6 \Rightarrow \frac{3}{2}x = 3 \Rightarrow x = 2$

پس: $f^{-1}(3) = 2$

۲) $g(\underbrace{f^{-1}(3)}_{2}) = g(2)$. $g(2)$ همان $f(2)$ است که برابر است با: $f(x) = \frac{-3}{2}x + 6 \Rightarrow f(2) = -3 + 6 = 3$

گام چهارم: $(f^{-1}og)(2) + (gof^{-1})(3) = 2 + 3 = 5$

تست و پاسخ ۶۴

اگر تابع $f(x) = (2k^2 - k)x^3 - 4$ اکیداً نزولی باشد، مقادیر عبارت $4k^2 - k$ در بازهٔ $[a,b]$ قرار دارند. مقدار $b - a$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{16}$ ۲) $-\frac{1}{16}$ ۳) $\frac{9}{16}$ ۴) $\frac{7}{16}$

پاسخ: گزینه ۳

نکته: تابع $y = a(x+b)^3 + c$ با شرط $a > 0$، اکیداً صعودی و با شرط $a < 0$، اکیداً نزولی است.

پاسخ تشریحی: **گام اول:** تابع $f(x) = (2k^2 - k)x^3 - 4$ نزولی اکید است؛ پس ضریب x^3، منفی است:

$$2k^2 - k < 0 \Rightarrow k(2k-1) < 0 \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} 0 < k < \frac{1}{2}$$

گام دوم: پس ما باید محدودهٔ تغییرات $4k^2 - k$ وقتی $0 < k < \frac{1}{2}$ را پیدا کنیم.

k_S (یا همان $\frac{-b}{2a}$) را حساب می‌کنیم:

$$k_S = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{2(4)} = \frac{1}{8}$$

مقدار عبارت درجه‌دوم $4k^2 - k$ را در سه نقطهٔ ابتدا، انتها و k_S حساب می‌کنیم:

$$k = 0: 4(0)^2 - 0 = 0$$

$$k = \frac{1}{2}: 4(\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$k = \frac{1}{8}: 4(\frac{1}{8})^2 - \frac{1}{8} = \frac{1}{16} - \frac{1}{8} = \frac{-1}{16}$$

بین سه مقدار به‌دست‌آمده، کم‌ترین مقدار $\frac{-1}{16}$ و بیشترین $\frac{1}{2}$ است، پس محدودهٔ تغییرات بازهٔ $[\frac{-1}{16}, \frac{1}{2}]$ است.

گام سوم: $b - a = \frac{1}{2} - (\frac{-1}{16}) = \frac{9}{16}$